ЧАСТЬ 1. АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Глава 1. Линейные и квадратные уравнения и неравенства. Элементы вычислительной математики

§ 1. Действия над действительными и комплексными числами

1. Обратите обыкновенные дроби в десятичные периодические:

1) $\frac{3}{11}$; 2) $\frac{95}{333}$; 3) $\frac{35}{111}$; 4) $\frac{13}{15}$; 5) $\frac{7}{12}$.

2. Обратите чистые периодические десятичные дроби в обыкновенные:

1) 0,(72); 2) 0,(42); 3) 0,(918); 4) 0,(513); 5) 0,(7263).

3. Обратите смешанные периодические десятичные дроби в обыкновенные:

1) 0,3(6); 2) 0,0(27); 3) 0,11(6); 4) 0,2(35); 5) 0,0(01).

4. Выполните сложение комплексных чисел:

1) $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = 4 - 7i$;

2) $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i$, $z_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i$;

3) $z_1 = -0{,}6 + 0{,}2i$, $z_2 = -0{,}4 - 0{,}5i$;

4) $z_1 = 3{,}6 + 0{,}2i$, $z_2 = 1{,}4 - 0{,}2i$;

5) $z_1 = 3 - 0{,}7i$, $z_2 = -3 + 0{,}7i$;

6) $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$.

5*.[1] Выполните графически сложение чисел $z_1 = -1 + 3i$ и $z_2 = 4 + 5i$.

[1] Ответы к задачам, помеченным знаком *, не приводятся.

6. Найдите разность $z_1 - z_2$ комплексных чисел:

1) $z_1 = 4 - 2i,\ z_2 = 3 + 8i$;

2) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}i,\ z_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}i$;

3) $z_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{5}i,\ z_2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{5}i$;

4) $z_1 = 1{,}5 - 2{,}1i,\ z_2 = 0{,}5 + 0{,}9i$;

5) $z_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i,\ z_2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}i$;

6) $z_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{2}i,\ z_2 = -\frac{1}{2}i$.

7. Найдите произведение комплексных чисел:

1) $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = -4 + i$;

2) $z_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}i,\ z_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}i$;

3) $z_1 = \sqrt{5}\,i,\ z_2 = 4\sqrt{5}\,i$;

4) $z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = 2i$;

5) $z_1 = -1 + 6i,\ z_2 = 6 - i$;

6) $z_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i,\ z_2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$;

7) $z_1 = 0{,}2 - 0{,}3i,\ z_2 = 0{,}5 + 0{,}4i$.

8. Выполните действия:

1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1}{1 - i}$; 3) $\frac{3 - 2i}{1 + 3i}$; 4) $\frac{(1 + 2i)(2 + i)}{3 - 2i}$;

5) $\frac{2 + 3i}{(4 + i)(2 - 2i)}$; 6) $\frac{(3 + 2i)(2 - i)}{(2 + 3i)(1 + i)}$; 7) $\frac{a + bi}{a - bi}$;

8) $\frac{\sqrt{5} + i}{\sqrt{5} - 2i}$; 9) $\frac{1 - 3i}{-2 + i} + \frac{1 + 4i}{-1 + 3i}$; 10) $\frac{a + bi}{a - bi} - \frac{a - bi}{a + bi}$.

9. Вычислите:

1) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$;

2) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$;

3) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4$;

4) $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5}$;

5) $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{33}}$.

10. Вычислите:

1) $(1 - i)^8$;

2) $(1 + i)^{15}$;

3) $\left(\frac{-1 + \sqrt{2}i}{2}\right)^3$;

4) $(1 + i)^{-3}$;

5) $(1 - i)^{-12}$.

11. Разложите на комплексные множители, применив формулу $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$:

1) $a^2 + 4b^2$;

2) $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{9}$;

3) $1 + \sqrt{3}$;

4) 3.

ОТВЕТЫ

1. 1) 0,(27); 2) 0,(285); 3) 0,(315); 4) 0,8(6); 5) 0,58(3). **2.** 1) $\frac{8}{11}$; 2) $\frac{14}{33}$; 3) $\frac{34}{17}$; 4) $\frac{19}{37}$; 5) $\frac{807}{1111}$. **3.** 1) $\frac{11}{30}$; 2) $\frac{3}{110}$; 3) $\frac{7}{60}$; 4) $\frac{233}{990}$; 5) $\frac{1}{990}$. **4.** 1) $1 - 2i$; 2) $-\frac{5}{12} + \frac{13}{12}i$; 3) $-1 - 0{,}3i$; 4) 5; 5) 0; 6) $3 + 8i$. **6.** 1) $1 - 10i$; 2) i; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $1 - 3i$; 5) $\frac{5}{8} - \frac{7}{8}i$; 6) $\frac{7}{8}$. **7.** 1) $-5 + 14i$; 2) $\frac{73}{144}$; 3) -20; 4) $6 + 10i$; 5) $37i$; 6) $\frac{2}{3} + \frac{7}{9}i$; 7) $0{,}22 - 0{,}07i$. **8.** 1) $-i$; 2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; 3) $-0{,}3 - 1{,}1i$; 4) $-\frac{10}{13} + \frac{15}{13}i$; 5) $\frac{1}{68} + \frac{21}{68}i$; 6) $-\frac{3}{26} - \frac{41}{26}i$; 7) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$; 8) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i$; 9) $0{,}1 + 0{,}3i$; 10) $\frac{4ab}{a^2 + b^2}i$. **9.** 1) -1; 2) i; 3) -1; 4) 0; 5) $-i$. **10.** 1) 16; 2) $128(1 - i)$; 3) $\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}i$; 4) $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$; 5) $-\frac{1}{64}$. **11.** 1) $(a + 2bi)(a - 2bi)$; 2) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}i\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}i\right)$; 3) $(1 + i\sqrt[4]{3})(1 - i\sqrt[4]{3})$; 4) $(1 + i\sqrt{2})(1 - i\sqrt{2})$.

§ 2. Действия над приближенными числами. Абсолютная и относительная погрешности

12. Граница абсолютной погрешности приближенного значения 486 числа x равна 0,5. Укажите границы, в которых заключено число x.

13. Найдите границу абсолютной погрешности измерений, полученных в виде неравенства $27 < x < 28$.

14. Площадь круга равна $37{,}5 \pm 0{,}2$ (см^2). Найдите границы измерения площади круга.

15. Найдите границу абсолютной погрешности приближенного значения 0,2367 числа x, все цифры которого верны в строгом смысле.

16. За приближенное значение числа 38,7 взято число 39. Являются ли цифры числа 39 верными?

17. При решении задачи сумма углов треугольника оказалась равной 179°30′. Найдите относительную погрешность полученного приближенного значения.

18. Вычислите относительную погрешность числа $\pi \approx 3{,}14$, считая $\pi \approx 3{,}1416$.

19. Найдите абсолютную погрешность округления до единиц числа: 1) 0,8; 2) 7,6; 3) 19,3; 4) 563,58.

20. Найдите относительную погрешность числа 2,6, если обе его цифры верные.

21. Округлите с наименьшей погрешностью до тысячных, сотых и десятых число: 1) 0,2373; 2) 3,35779; 3) 14,00281; 4) 5,326.

22. Вычислите сумму $a = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами. Найдите абсолютную погрешность Δa и относительную погрешность ε_a.

23. Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями $r_1 = 4{,}8 \pm 0{,}05$ (Ом), $r_2 = 6{,}25 \pm 0{,}005$ (Ом), $r_3 = 7{,}725 \pm 0{,}0005$ (Ом).
Вычислите общее сопротивление цепи R по формуле $R = r_1 + r_2 + r_3$. Найдите абсолютную ΔR и относительную ε_R погрешности.

24. Вычислите разность $a = \sqrt{13} - \sqrt{5}$ с четырьмя значащими цифрами. Найдите абсолютную Δa и относительную ε_a погрешности.

25. Найдите произведение чисел $0{,}456 \pm 0{,}0005$ и $3{,}35 \pm 0{,}005$ и относительную погрешность произведения.

26. Диаметр окружности равен $12{,}5 \pm 0{,}05$ (см). Вычислите длину окружности и найдите границу абсолютной погрешности, полагая $\pi = 3{,}14$.

27. Найдите относительную погрешность частного двух приближенных значений чисел $a = 19{,}8 \pm 0{,}05$ и $b = 48{,}4 \pm 0{,}03$.

28. Вычислите $x = \dfrac{a+b}{c}$, если $a = 8{,}15$, $b = 7{,}65$, $c = 6{,}29$.

29. Найдите относительную погрешность при вычислении объема куба, если приближенное значение длины ребра куба равно $3{,}8 \pm 0{,}05$.

30. Вычислите относительную погрешность $\sqrt[3]{26{,}4}$.

31. С какой точностью следует измерить сторону квадрата, чтобы относительная погрешность не превышала 0,3%? Приближенное значение стороны квадрата равно 6 (м).

12. $485{,}5 < x < 486{,}5$. **13.** 0,5. **14.** $37{,}3 < 37{,}5 < 37{,}7$ (см^2). **15.** 0,00005. **16.** Цифры 3 и 9 верные в строгом смысле. **17.** 0,3%. **18.** 0,05%. **19.** 1) 0,2; 2) 0,4; 3) 0,3; 4) 0,42. **20.** 2%. **21.** 1) 0,237; 0,24; 0,2; 2) 3,358; 3,36; 3,4; 3) 14,003; 14,00; 14; 4) 5,326; 5,33; 5,3. **22.** $a = 6{,}61$; $\Delta a = 0{,}0015$; $\varepsilon_a = 0{,}00023$. **23.** $R = 18{,}8$ (Ом); $\Delta R = 0{,}06$; $\varepsilon_R = 0{,}3\%$. **24.** $a = 1{,}37$; $\Delta a = 0{,}001$; $\varepsilon_a = 0{,}1\%$. **25.** 1,53; 0,2%. **26.** $39 \pm 0{,}2$ (см). **27.** 0,3%. **28.** $2{,}51 \pm 0{,}004$. **29.** 4%. **30.** 0,06%. **31.** До 0,01 (м).

§ 3. Линейные уравнения с одной переменной

32. Решите уравнение:

1) $4x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 57$;

2) $\frac{5(x+1)}{8} + \frac{2(x-1)}{11} - \frac{x-3}{2} = 9$;

3) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{9} = 13$;

4) $\frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3} - \frac{x-5}{2} = \frac{x-1}{8}$;

5) $\frac{7+9x}{4} + \frac{2-x}{9} = 7x + 1$;

6) $5(x+5) + 3(x+2) - 7(x+6) = x$;

7) $5(x+5) + 3(x+2) - 7\left(x + 4\frac{3}{7}\right) = x$.

33. Решите уравнение:

1) $\frac{x+2}{x-8} - \frac{x-1}{x-8} = \frac{3}{2}$;

2) $\frac{4x}{x+5} - \frac{x}{x-1} = 3$;

3) $\frac{5x-2}{2x-3} - \frac{19}{4x-6} = \frac{7}{2}$;

4) $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-6} + \frac{1}{x-8} = 0$;

5) $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{(x+2)(x+3)}$.

34. Разделите число 75 на две части так, чтобы бóльшая часть превышала втрое разность между обеими частями.

35. Сумма двух чисел равна 64. При делении большего числа на меньшее получается в частном 3 и в остатке 4. Найдите эти числа.

36. Верхнее основание трапеции составляет 5 см, высота — 8 см, площадь — 68 см^2. Вычислите длину нижнего основания.

37. Сумма двух чисел равна 2490. Найдите эти числа, если 6,5% одного из них составляет 8,5% другого.

38*. Решите графическим способом уравнение:

1) $x - 2 = 0$; 2) $x + 2 = 0$; 3) $2x - 5 = 0$;
4) $3 - x = 2x - 3$; 5) $x = 2x + 2$.

39. Решите уравнение аналитическим и графическим способами:

1) $|x| = 5$; 2) $|3x - 5| = 1$;

3) $|2x - 5| = x - 1$; 4) $\left|\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right| = x - 1$;

5) $|2x - 5| = 2 - x$.

ОТВЕТЫ

32. 1) 18; 2) 23; 3) 9; 4) 13; 5) $\frac{1}{5}$; 6) корней нет; 7) бесконечное множество корней. **33.** 1) 10; 2) $\frac{5}{7}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 9; 5) корней нет. **34.** 45; 30. **35.** 49; 15. **36.** 12 см. **37.** 1411; 1079. **39.** 1) -5 или 5; 2) $\frac{4}{3}$ или 2; 3) 2 или 4; 4) $\frac{3}{2}$; 5) решений нет.

§ 4. Линейные неравенства

40. Решите неравенство:

1) $x + 6 > 2 - 3x$; 2) $3x - 6 \geqslant 4x - 9$;

3) $\frac{7 - 6x}{2} + 10x < \frac{20x + 1}{3} + 2$; 4) $(x - 1)^2 - 5 \leqslant (x + 4)^2$;

5) $4x - 7 < 3 + 4x$; 6) $5x - 4 > 7 + 5x$.

41. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3x + 7 > 7x - 9, \\ x - 3 > -3x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x > 4x + 6, \\ 4x + 3 < 2x + 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x - 7 > 5x - 1, \\ 3x + 6 > 8x - 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 3 > 1 + x, \\ \frac{1}{2} - 3x < \frac{2}{3}x - 5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{7 - 6x}{2} + 10x \leqslant \frac{8x + 1}{2} - 12, \\ \frac{x + 1}{2} > 2x - 2\frac{1}{2}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{4x-3}{6}+3>\dfrac{3x}{2}+\dfrac{5}{8}, \\ \dfrac{4x-3}{8}+\dfrac{x-5}{5}>\dfrac{x-1}{2}. \end{cases}$

42. Решите совокупность неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l} 4x+7>2x+13 \\ 3x+2<2x+3; \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} 2-3x<8-5x \\ 2(4-x)\geqslant x-22; \end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l} 5-2x>3x-10 \\ 2(1-2x)>1-5x; \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} 2x-4>5-x \\ 1-5x\leqslant 8-4x. \end{array}\right.$

43. Решите неравенство:

1) $\dfrac{3a+1}{2a+3}>0;$

2) $\dfrac{5-m}{2-3m}\geqslant 0;$

3) $\dfrac{2x+1}{3x+2}<0;$

4) $\dfrac{1-2y}{4-3y}\leqslant 0;$

5) $\dfrac{2x+3}{3x+2}\leqslant 2;$

6) $\dfrac{2(1-4a)}{2a+1}\geqslant -6;$

7) $\dfrac{3-5m}{2m-5}<-3;$

8) $\dfrac{3x+1}{2x-5}>2.$

44. Решите неравенство:

1) $|x-2|<4;$

2) $|x+8|<1;$

3) $|x-5|>8;$

4) $|3x+6|\geqslant 3.$

ОТВЕТЫ

40. 1) $-1<x<+\infty$; 2) $-\infty<x\leqslant 3$; 3) $-\infty<x<-3{,}5$; 4) $-2\leqslant x<+\infty$; 5) $-\infty<x<+\infty$; 6) нет решения. **41.** 1) $1<x<4$; 2) $-\infty<x<-3$; 3) нет решения; 4) $1{,}5<x<+\infty$; 5) $-\infty<x\leqslant -5$; 6) нет решения. **42.** 1) $-\infty<x<1$ или $3<x<+\infty$; 2) $-\infty<x\leqslant 10$; 3) $-\infty<x<+\infty$; 4) $-7\leqslant x<+\infty$. **43.** 1) $-\infty<a<-\frac{3}{2}$ или $-\frac{1}{3}<a<+\infty$; 2) $-\infty<m<\frac{2}{3}$ или $5\leqslant m<+\infty$; 3) $-\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\leqslant y<\frac{4}{3}$; 5) $-\infty<x<-\frac{2}{3}$ или $-\frac{1}{4}\leqslant x<+\infty$; 6) $-\infty<a\leqslant -2$ или $-\frac{1}{2}<a<+\infty$; 7) $2{,}5<m<12$; 8) $2{,}5<x<11$. **44.** 1) $-2<x<6$; 2) $-9<x<-7$; 3) $-\infty<x<-3$ или $13<x<+\infty$; 4) $-\infty<x\leqslant -3$ или $-1\leqslant x<+\infty$.

45. Решите систему способами алгебраического сложения, подстановки и графическим:

1) $\begin{cases} 5x - 2y = 7, \\ 3x + 4y = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x + 4y = 7, \\ 4x + 2y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ -6x + 9y = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 4y = 14, \\ 4x + 3y = -27. \end{cases}$

46. При каком значении a система

$$\begin{cases} 2x - ay = 3, \\ 6x - 9y = 9 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

47. При каком значении a система

$$\begin{cases} 4x + 3y = 12, \\ 2x + ay = 7 \end{cases}$$

не имеет решений?

48. Если увеличить ширину прямоугольной площадки на 4 м, а ее длину уменьшить на 2 м, то ее площадь увеличится на 8 м^2; если же ширину уменьшить на 3 м, а длину увеличить на 1 м, то ее площадь уменьшится на 23 м^2. Найдите ширину и длину площадки.

49. Величина одного из углов треугольника равна 50°, а разность значений двух других углов равна 10°. Найдите углы треугольника.

50. Сумма 5% числа a и 4% числа b составляет 16, а сумма 6% числа a и 8% числа b составляет 24. Найдите искомые числа a и b.

Решите систему по формулам Крамера [**51, 52**].

51. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 5x - y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5y = 14, \\ 2x - 4y = -20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{3} - \dfrac{3x - 2}{4} = x + y, \\ 5x - 4y = -18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1 - 2y}{5} - \dfrac{x}{5} - 2y = 4, \\ 2(1 - y) - x = 1. \end{cases}$

52. 1) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2, \\ 4x + 3y + 2z = 16, \\ 2x - 3y + z = 17; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 11, \\ 2x - y - 2z = -6, \\ 3x - 2y + z = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 2y - z = 2, \\ 3x - 6y - 3z = 6, \\ 5x - 10y - 5z = 10. \end{cases}$

53. Решите систему с применением метода Гаусса:

1) $\begin{cases} -x + 2y + z = 7, \\ 3x - y + 6z = 19, \\ -4x + 3y - z = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1, \\ 3x - y + 2z = 1, \\ 4x - y + 5z = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = -11, \\ 3x + 2y - z = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + 3y + 2z - 1 = 0, \\ 2x - 5y - 3z - 16 = 0, \\ 3x + 2y + 4z - 4 = 0. \end{cases}$

ОТВЕТЫ

45. 1) (3; 4); 2) нет решения; 3) бесконечное множество решений; 4) (−3; −5). **46.** $a = 3$. **47.** $a = 1{,}5$. **48.** 16 м, 12 м. **49.** 60°, 70°. **50.** $a = 200$, $b = 150$. **51.** 1) (2; 3); 2) (−2; 4); 3) (−2; 2); 4) (5; −2). **52.** 1) (8; 4; 2); 2) (3; −2; 5); 3) (1; 2; 3); 4) бесконечное множество решений. **53.** 1) (−4; −1; 5); 2) (2; 1; −2); 3) (4; −1; 3); 4) (2; −3; 1).

§ 6. Квадратные уравнения

54. Решите квадратное уравнение:

1) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;

2) $4x^2 + x - 3 = 0$;

3) $\dfrac{x - 7}{2(x + 3)} = \dfrac{x - 6}{x + 24}$;

4) $x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$ $(a > 0)$;

5) $(mx + n)(nx - m) = 0$ $(m > 0,\ n > 0)$;

6) $x^2 - 2x + 2 = 0$;

7) $x^2 - 6x + 13 = 0$;

8) $x^2 + 7x - 18 = 0$;

9) $x^2 + 2x - 35 = 0$;

10) $\dfrac{3}{x^2 - 1} + \dfrac{3}{2(1 - x)} = \dfrac{1}{2}$;

11) $x^2 + (a + b)x + ab = 0$ $(a > 0,\ b > 0)$.

55. Решите квадратное уравнение с использованием теоремы Виета:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
2) $x^2 + 12x + 20 = 0$;
3) $x^2 - 4x - 12 = 0$;
4) $x^2 + x - 6 = 0$.

56. Решите неполное квадратное уравнение:

1) $6x^2 = 0$;
2) $x^2 + 3x = 0$;
3) $x^2 - 27 = 0$;
4) $x^2 + 16 = 0$.

57. Решите уравнение, приводимое к неполному квадратному:

1) $\frac{5x^2 + 9}{6} - \frac{4x^2 - 9}{5} = 3$;
2) $\frac{y^2 + 5y + 3}{y^2 + y + 2} = \frac{3}{2}$;
3) $\frac{2x + 3}{3} = \frac{3}{2x + 3}$;
4) $\frac{x + 2}{x - 1} - \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{4x^2}{x^2 - 1}$.

58. Составьте квадратное уравнение по его корням:

1) $x_1 = -5$, $x_2 = 2$;
2) $x_1 = 5$, $x_2 = 3$;
3) $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{3}{4}$;
4) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

59. Определите знаки корней квадратного уравнения (не решая уравнения):

1) $6x^2 + 2x - 11 = 0$;
2) $4x^2 - x - 9 = 0$;
3) $2x^2 - 15x + 11 = 0$;
4) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
5) $3x^2 + 13x + 9 = 0$.

60. Разложите на линейные множители квадратный трехчлен:

1) $2x^2 - 7x + 3$;
2) $6a^2 + 5a - 6$;
3) $3y^2 - 11y - 20$;
4) $12x^2 + 7x + 1$;
5) $m^2 - 2m - 3$;
6) $-x^2 + 5x - 6$.

61. Сократите дробь:

1) $\frac{2x^2 - 9x + 10}{2x^2 + x - 15}$;
2) $\frac{3y^2 + 8y - 3}{6y^2 + 13y - 5}$;
3) $\frac{6a^2 + 5a - 4}{3a^2 + 19a + 20}$;
4) $\frac{4 + 3a - a^2}{3a^2 + 4a + 1}$.

62. Решите биквадратное уравнение:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$;
3) $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$;
4) $4x^4 - x^2 - 3 = 0$.

63. Решите уравнение, левая часть которого разлагается на множители:

1) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$; 2) $x^4 - 13x^2 - 12x = 0$;
3) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

64. Решите двучленное уравнение:

1) $x^4 - 81 = 0$; 2) $125x^3 + 8 = 0$;
3) $16x^4 - 625 = 0$; 4) $125x^3 - 27 = 0$.

65. Решите задачу на составление квадратного уравнения.

1) Числитель дроби на 2 меньше ее знаменателя. Если сложить ее с обратной ей дробью, то их сумма составит $\frac{34}{15}$. Найдите эту дробь.

2) Найдите двузначное число, если известно, что цифра его единиц на 2 больше цифры его десятков и что произведение числа на сумму его цифр равно 144.

3) Периметр прямоугольника равен 42 см, а длина его диагонали равна 15 см. Вычислите длины сторон прямоугольника.

4) Площадь прямоугольника равна 192 см^2, а его периметр равен 56 см. Вычислите длины сторон прямоугольника.

5) Из листа железа прямоугольной формы сделана коробка (без крышки), объем которой равен 750 см^3. Для этого по углам листа вырезаны квадраты со стороной, равной 5 см, и получившиеся края загнуты. Найдите размеры листа железа, если одна из его сторон на 5 см больше другой.

6) Сумма длин окружностей переднего и заднего колес повозки равна 5 м. На протяжении 60 м переднее колесо сделало на 9 оборотов больше, чем заднее на протяжении 63 м. Найдите длины окружностей $l_п$ и $l_з$ колес.

ОТВЕТЫ

54. 1) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{4}$; 3) $x_1 = 11$, $x_2 = 12$; 4) $x_1 = a$, $x_2 = 3a$; 5) $x_1 = -\frac{n}{m}$, $x_2 = \frac{m}{n}$; 6) $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 1 + i$; 7) $x_1 = 3 - 2i$, $x_2 = 3 + 2i$; 8) $x_1 = -9$, $x_2 = 2$; 9) $x_1 = -7$, $x_2 = 5$; 10) $x = -4$ (корень $x = 1$ не удовлетворяет уравнению); 11) $x_1 = -a$, $x_2 = -b$. **55.** 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; 2) $x_1 = -2$, $x_2 = -10$; 3) $x_1 = -2$, $x_2 = 6$; 4) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. **56.** 1) $x_{1,2} = 0$; 2) $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; 3) $x_1 = 3\sqrt{3}$, $x_2 = 3\sqrt{3}$; 4) $x_1 = -4i$, $x_2 = 4i$. **57.** 1) $x_1 = -3i$, $x_2 = 3i$; 2) $y_1 = 0$; $y_2 = \sqrt{7}$; 3) $x_1 = 0$; $x_2 = -3$; 4) $x_1 = 0$;

$x_2 = \frac{3}{2}$. **58.** 1) $x^2 + 3x - 10 = 0$; 2) $x^2 - 8x + 15 = 0$; 3) $4x^2 + 11x + 6 = 0$; 4) $6x^2 - 7x + 2 = 0$. **59.** 1) Знаки корней различны; больший по модулю корень — отрицательный; 2) знаки корней различны; больший по модулю корень — положительный; 3), 4) оба корня положительные; 5) оба корня отрицательные. **60.** 1) $(x - 3)(2x - 1)$; 2) $(2a + 3)(3a - 2)$; 3) $(3y + 4)(y - 5)$; 4) $(3x + 1)(4x + 1)$; 5) $(m + 1)(m - 3)$; 6) $(x - 3)(2 - x)$. **61.** 1) $\frac{x - 2}{x + 3}$; 2) $\frac{y + 3}{2y + 5}$; 3) $\frac{2a - 1}{a + 5}$; 4) $\frac{4 - a}{3a + 1}$. **62.** 1) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$; 2) $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 5$; 3) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \pm 4$; 4) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $x_{3,4} = \pm 1$. **63.** 1) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$; 2) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$; $x_4 = 4$; 3) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. **64.** 1) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$; 2) $x = -0{,}4$; 3) $x_1 = -2{,}5$, $x_2 = 2{,}5$; 4) $x = 0{,}6$. **65.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) 24; 3) 9 см, 12 см; 4) 12 см, 16 см; 5) 20 см, 25 см; 6) $l_п = 2$ м, $l_з = 3$ м.

§ 7. Квадратные неравенства

Решите неравенство [66—69].

66. 1) $x^2 - x - 12 \geqslant 0$; 2) $-x^2 + x + 2 > 0$;
3) $x^2 + 6x + 9 < 0$; 4) $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$;
5) $-x^2 + 6x - 5 \geqslant 0$; 6) $x^2 + 2x + 1 > 0$;
7) $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$; 8) $2x^2 - 4x + 7 > 0$;
9) $-x^2 + 4x - 5 > 0$; 10) $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$.

67. 1) $(x + 2)(x - 4)(x - 5) < 0$; 2) $(x + 1)(x - 2)(x - 3) > 0$;
3) $(x + 4)(x - 1)(x - 5) \leqslant 0$; 4) $(x + 4)(x + 2)^2(x - 1) < 0$.

68. 1) $\frac{x + 2}{x - 4} - \frac{x - 4}{x + 2} > 0$; 2) $\frac{x + 1}{x - 3} < 3$.

69. 1) $\frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(x + 2)(x + 1)} \leqslant 0$;

2) $\frac{(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{(x + 3)(x + 2)} > 0$;

3) $\frac{(x + 1)^3(x + 2)}{(x - 1)(x - 3)} \leqslant 0$.

66. 1) $x \leqslant -3$, $x \geqslant 4$; 2) $-1 < x < 2$; 3) решения нет; 4) $2 \leqslant x \leqslant 4$; 5) $1 \leqslant x \leqslant 5$; 6) $x < -1$, $x > -1$; 7) $x \leqslant 1$, $x \geqslant 3$; 8) $-\infty < x < +\infty$; 9) решения нет; 10) $x \leqslant 2$, $x \geqslant 4$. **67.** 1) $-\infty < x < -2$ или $4 < x < 5$; 2) $-1 < x < 2$ или $3 < x < +\infty$; 3) $-\infty < x < -4$ или $1 \leqslant x \leqslant 5$; 4) $-4 < x < 1$. **68.** 1) $x < -4$ или $-1 < x < 2$; 2) $x < 3$ или $x > 5$. **69.** 1) $-\infty < x < -2$, или $-1 < x \leqslant 1$, или $2 \leqslant x \leqslant 3$; 2) $-3 < x < -2$, или $2 < x < 3$, или $4 < x < +\infty$; 3) $-2 \leqslant x \leqslant -1$ или $1 < x < 3$.

§ 8. Иррациональные уравнения и иррациональные неравенства

Решите уравнение [70—72].

70. 1) $\sqrt{6-x} = x$; 2) $\sqrt{x+2} = 3x-4$;

3) $\sqrt{16-x} = x-10$; 4) $\sqrt{4-2x} = x-2$;

5) $\sqrt{x^2+3x-3} = 2x-3$.

71. 1) $\sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3$; 2) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 1$;

3) $\sqrt{5x+20} - \sqrt{x+8} = 2$; 4) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1$;

5) $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$.

72. 1) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-1}$;

2) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-4} = \sqrt{8x-7}$;

3) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$;

4) $\sqrt{1-x} = \sqrt{6-x} - \sqrt{-2x-5}$;

5) $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}$.

73*. Не решая уравнения, объясните, почему оно не может иметь корней:

1) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 0$; 2) $\sqrt{4x-3} = -4$;

3) $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2x-1} = -2$; 4) $\sqrt{3-x} + \sqrt{2-x} = -1$;

5) $\sqrt{x-7} - \sqrt{6-x} = 3$.

Решите иррациональное неравенство [74—76].

74. 1) $\sqrt{x+12} < x$; 2) $\sqrt{x+3} < x+1$;

3) $\sqrt{2x+9} < 3-x$; 4) $\sqrt{x^2-1} < 5-x$;

5) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$.

75. 1) $\sqrt{2x-5} > 7$; 2) $\sqrt{x+2} > x$;

3) $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2$; 4) $\sqrt{x^2+4x} > 2-x$;

5) $\sqrt{2x+1} > 1-x$.

76. 1) $\sqrt{3x+1} > \sqrt{2-x}$; 2) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}$;

3) $\sqrt{20-x} - \sqrt{10-x} > 2$; 4) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-8} > 3$.

ОТВЕТЫ

70. 1) 2; 2) 2; 3) 12; 4) 2; 5) 4. **71.** 1) 5; 2) 1 и 5; 3) 1; 4) решения нет; 5) −5 и 4. **72.** 1) 1; 2) 4; 3) 5 и 6; 4) −3; 5) решения нет. **74.** 1) $4 < x < +\infty$; 2) $1 < x < +\infty$; 3) $-4{,}5 \leqslant x < 0$; 4) $-\infty < x \leqslant -1$ или $1 \leqslant x < 2{,}6$; 5) $0 \leqslant x \leqslant 3$. **75.** 1) $27 < x < +\infty$; 2) $-2 \leqslant x < 2$; 3) $-\infty < x \leqslant -2$ или $14 < x < +\infty$; 4) $\frac{1}{2} < x < +\infty$; 5) $0 < x < +\infty$. **76.** 1) $\frac{1}{4} < x \leqslant 2$; 2) $\frac{2}{3} < x \leqslant 3$; 3) $\frac{31}{4} < x \leqslant 10$; 4) $8 \leqslant x < 12$ или $24 < x < +\infty$.

§ 9. Нелинейные системы уравнений с двумя переменными

77. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 13, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y^2 = 11, \\ xy^2 = 18; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 92, \\ x + 3y = 18; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 117, \\ x - y = 3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = 3, \\ x + y = 6; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y + 1}{y^2 + x + 1} = \dfrac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 17xy, \\ x + y = 10. \end{cases}$

78. Дайте геометрическую иллюстрацию решения системы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + 7y - 25 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ x + y = 2. \end{cases}$

79. Среднее арифметическое двух чисел равно 20, а среднее геометрическое равно 12. Найдите эти числа.

80. Если двузначное число разделить на сумму составляющих его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 12. Если же число разделить на произведение составляющих его цифр, то в частном получится 1 и в остатке 20. Найдите это число.

81. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 37 см, а его площадь составляет 210 см^2. Найдите длины его катетов.

82. Площадь прямоугольника равна 972 см^2, а длина его диагонали равна 45 см. Найдите длины сторон прямоугольника.

83. Периметр прямоугольного треугольника равен 90 см, а его площадь равна 270 см^2. Найдите длины сторон треугольника.

84. Площадь прямоугольника равна 1080 см^2, а его периметр равен 138 см. Найдите длины сторон и диагональ прямоугольника.

ОТВЕТЫ

77. 1) (7; 6); 2) (−1; −3), (−3; −1), (1; 3), (3; 1); 3) (−3; −2), (3; 2); 4) (2; −3), (2; 3), (9; $-\sqrt{2}$), (9; $\sqrt{2}$); 5) (−2; −3), (2; 3), (−3; −2), (3; 2); 6) (192; −58), (6; 4); 7) (−2; −5), (5; 2); 8) (4; 2), (16; −10); 9) (3; 2), (2; 1); 10) (8; 2), (2; 8). **78.** 1) Точки пересечения прямой с окружностью: (4; 3), (−3; 4); 2) точки пересечения параболы с прямой: (−1; 3), (2; 0). **79.** 4, 36. **80.** 68. **81.** 12 см, 35 см. **82.** 27 см, 36 см. **83.** 15 см, 36 см, 39 см. **84.** 24 см, 45 см, 51 см.

Глава 2. Логарифмическая и показательная функции

§ 10. Логарифмическая функция

85. Найдите область определения функции:

1) $y = \log_2 (6 - 4x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (4x - 5)$;

3) $y = \log_3 (x + 8) + \log_5 (4 - x)$.

86*. Постройте график функции:

1) $y = \log_2 (x - 2)$; 2) $y = \log_2 |x - 2|$;

3) $y = \log_3 (3 - x)$.

87. Прологарифмируйте выражение:

1) $x = 3a^2b^2\sqrt[3]{c}$; 2) $x = 4(a - b)^2$;

3) $x = \dfrac{a^{3/2} \cdot b^{-2}}{c^{1/3}}$; 4) $x = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{13}}}$;

5) $x = \dfrac{a^{1/5}b^{-2}}{c^{-\frac{2}{3}}}$; 6) $x = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

88. Выполните потенцирование ($a > 0$, $b > 0$, $a > b$):

1) $\log x = \log 3 + \log 5 - \log 2$;

2) $\log x = 3\log 5 + 2\log 3$;

3) $\log x = 2\log 13 - \frac{2}{5}\log 2 - \frac{1}{3}\log 7$;

4) $\log x = \log (a + b) - \frac{2}{3}\left(2\log a + \frac{3}{4}\log b\right)$;

5) $\log x = 2\log (a - b) + \frac{3}{4}\left(\log a - \frac{2}{3}\log b\right)$.

89. Вычислите значение x:

1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{8}\right) = x$; 2) $\log_{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{27}\right) = x$;

3) $\log_x 0{,}125 = -3$; 4) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$;

5) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$; 6) $\log_5 x = -3$;

7) $\log_6 x = -2$; 8) $\log_x 8 = -\frac{1}{2}$.

ОТВЕТЫ

85. 1) $-\infty < x < \frac{3}{2}$; 2) $\frac{5}{4} < x < +\infty$; 3) $-8 < x < 4$. **87.** 1) $\log x = \log 3 + 2\log a + 2\log b + \frac{1}{3}\log c$; 2) $\log x = \log 4 + 2\log(a - b)$; 3) $\log x = \frac{3}{2}\log a - 2\log b - \frac{1}{3}\log c$; 4) $\log x = \frac{1}{2}\left(\log 3 + \frac{1}{2}\left(\log 5 + \frac{1}{2}\log 13\right)\right)$; 5) $\log x = \frac{1}{5}\log a - 2\log b + \frac{3}{2}\log c$; 6) $\log x = \frac{1}{2}(\log p + \log(p - a) + \log(p - b) + \log(p - c))$. **88.** 1) $\frac{3 \cdot 5}{2}$; 2) $5^3 \cdot 3^2$; 3) $13^2 \cdot 2^{-2/5} \cdot 7^{-1/3}$; 4) $x = (a + l) \cdot (a^2 \cdot b^{3/4})^{-(2/3)}$; 5) $x = (a - b)^2\ (a^2 \cdot b^{-2/3})^{3/4}$. **89.** 1) 6; 2) -2; 3) 2; 4) $\frac{1}{16}$; 5) 8; 6) $\frac{1}{125}$; 7) $\frac{1}{36}$; 8) $\frac{1}{64}$.

§ 11. Показательные уравнения и системы показательных уравнений. Показательные неравенства

Решите уравнение [90—94].

90. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x-3}} = 1$; 2) $5^{x^2-8x+12} = 1$;

3) $2^{x^2}\ 4^{-x} = 8$; 4) $3^{2x-6} = 9^{2\sqrt{x}}$;

5) $100^x = 1000\sqrt[x]{\frac{1}{10}}$.

91. 1) $\sqrt{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{64}\right)^x$; 2) $3\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}(x-5)}$;

3) $\sqrt[7]{9} = 3^{x^2 - \frac{5}{7}x}$; 4) $5^{x-\sqrt{3x-5}} = 125$;

5) $5^{(\sqrt[x]{64})} = 625$.

92. 1) $5^{x-4} = 6^{x\ 4}$; 2) $8^{5-x} = 7^{x-5}$;

3) $4^{\frac{9}{2}x-3} = 7^{x-\frac{2}{3}}$.

93. 1) $5^{x+1} + 5^x = 750$; 2) $2^x - 2^{x-2} = 3$;

3) $27^{x-\frac{2}{3}} + 9^{x-1} = 2 \cdot 3^{3x\ 2}$; 4) $7^{5x} - 7^{5x-1} = 6$.

94. 1) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$;
2) $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0$;
3) $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} - 29 = 0$;
4) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$;
5) $6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$;
6) $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

95. Решите систему показательных уравнений:

1) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3^x - 4^y = 77, \\ 3^{x/2} - 2^y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 8\frac{1}{9}, \\ 2^x \cdot 3^y = \frac{8}{9}; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \frac{11}{4}, \\ 2^x - 3^y = -\frac{3}{4}. \end{cases}$

96. Решите показательное неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$;
2) $3^x > 27$;
3) $2^{3x} > \frac{1}{8}$;
4) $3^{x^2-1} > 1$;
5) $2^x > 5$;
6) $2^{x^2-8x+18} > 8$.

97. Решите неравенство:

1) $4^x - 2^x < 12$;
2) $8^{2x-1} + 8^{x+1} - 72 < 0$;
3) $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x > 0$;
4) $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$;
5) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} - 6 \cdot 4^{x+1} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} \leqslant 0$.

ОТВЕТЫ

90. 1) 3; 2) 2; 6; 3) −1; 3; 4) 9; 5) $\frac{1}{2}$; 1. **91.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 8; 3) $-\frac{2}{7}$; 1; 4) 7; 5) 3. **92.** 1) 4; 2) 5; 3) $\frac{2}{3}$. **93.** 1) 3; 2) 2; 3) 0; 4) $\frac{1}{5}$. **94.** 1) 0; $\log_7 5$; 2) 1; 2; 3) 2; $\log_3 \frac{2}{3}$; 4) 0; 1; 5) −1; 1; 6) −2. **95.** 1) (1; 2); 2) (4; 1); 3) (3; −2); $\left(\log_2 \frac{1}{9};\ \log_3 8\right)$; 4) (3; 2); 5) $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\right)$; $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{4}\right)$; 6) (−2; 0). **96.** 1) $x > 3$; 2) $x > 3$; 3) $x > -1$; 4) $x < -2$ или $x > 2$; 5) $x > \log_2 5$; 6) $x < 3$ или $x > 5$. **97.** 1) $x < 2$; 2) $x < 1$; 3) $x < 0$; 4) $-1 < x < 1$; 5) $x \leqslant -\frac{1}{2}$.

§ 12. Логарифмические уравнения и системы логарифмических уравнений. Логарифмические неравенства

Решите уравнение [98—100].

98. 1) $\lg(x+4) - \lg(x-3) = \lg 8$;

2) $\lg(x+2) - \lg 5 = \lg(x-6)$;

3) $\lg(x-2) + \lg x = \lg 8$;

4) $\lg\sqrt{x-7} + \lg\sqrt{3x-8} = 1$;

5) $\log_5(x+10) = 2$;

6) $\log_x 2 + \log_x 3 = \frac{1}{3}$.

99. 1) $\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1$;

2) $\log_2^2 x - 6\log_2 x = -8$;

3) $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$;

4) $\log_2^2 x - \log_2 x = \log_2 x + 3$.

100. 1) $\log_2 x + \log_8 x = 8$;

2) $\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 8$;

3) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 14$;

4) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

101. Решите систему логарифмических уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = -1, \\ y - x = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4, \\ 3^x \cdot 2^y = 576; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$

102. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \log_2(x - y) = 5 - \log_2(x + y), \\ \lg x - \lg 4 = \lg 3 - \lg y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_x(x - 3y) = 2, \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{5/2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x \log_3 \log_x y = 0, \\ \log_y 27 = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_4 y^2} = 5, \\ 3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y^2} = 7. \end{cases}$

103. Решите логарифмическое неравенство:

1) $\log_3 (x + 2) < 3$;
2) $\log_8 (4 - 2x) \geqslant 2$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) \geqslant -2$;
4) $\log_{\frac{2}{3}} (2 - 5x) < -2$.

104. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{5}} (3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}} (x + 1)$;

2) $\log_{x-3} (x^2 + 4x - 5) > \log_{x-3} (x - 1)$;

3) $\log_2^2 (x - 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > 2$;

4) $\log_{\frac{1}{4}} (x + 1) \geqslant -2 \log_{\frac{1}{16}} 2 + \log_{\frac{1}{4}} (x^2 + 3x + 8)$;

5) $\dfrac{1}{1 - \log_{\frac{1}{2}} x} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} > 1$.

ОТВЕТЫ

98. 1) 4; 2) 8; 3) 4; 4) 11; 5) 15; 6) 216. **99.** 1) 0,05; 0,2; 2) 4; 16; 3) 4; 4) $\frac{1}{2}$; 8. **100.** 1) 64; 2) 16; 3) 256; 4) 27. **101.** 1) (1; 10); 2) (2; 6); 3) (16; 25); (25; 16); 4) (8; 6); (6; 8). **102.** 1) (6; 2); 2) (16; 4); 3) (3; 27); 4) (81; 4). **103.** 1) $-2 < x < 25$; 2) $x \leqslant -30$; 3) $1 < x \leqslant 10$; 4) $x < \frac{1}{20}$.
104. 1) $\frac{5}{3} < x < 3$; 2) $x > 4$; 3) $1 < x < \frac{5}{4}$; $x > 3$; 4) $x > -1$; 5) $\frac{1}{2} < x < 1$.

Глава 3. Тригонометрические функции

§ 13. Векторы на плоскости

105. Параллельный перенос переводит точку (−4; 1) в точку (2; − 3). В какую точку он переводит точку (5; 5)?

106*. По данным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ постройте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

107. Выразите через единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектор

1) $\vec{a} = (-2; -4)$;
2) $\overrightarrow{AB}$: $A(-1; 2)$, $B(-2; -6)$.

108. Вычислите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $A(-2; -2)$, $B(4; -1)$.

109. Найдите периметр треугольника, вершинами которого служат точки

$$A\,(4;\,0),\ B(7;\,4),\ C(-4;\,6).$$

110. Вычислите косинусы углов, образуемых вектором $\overrightarrow{AB}$ с осями координат, если координаты его начала и конца $A(-2; -3)$, $B(3; 9)$.

111. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2; 4)$, $\vec{b} = (4; 1)$.

112. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

113. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(3; 1)$, $B(7; 4)$, $C(3; 2)$, $D(6; 6)$.

ОТВЕТЫ

105. (11; 1). **107.** 1) $-2\vec{i}$; $-4\vec{j}$; 2) $-\vec{i}$ $-8\vec{j}$. **108.** (6; 1). **109.** $15 + 5\sqrt{5}$.

110. $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$. **111.** 12. **112.** –26. **113.** 16°,3.

§ 14. Радианное измерение дуг и углов

114. Переведите из градусной в радианную меру:

1) 14°,8; 2) 70°,28; 3) 16°,24; 4) 114°,75; 5) 214°,8.

115. Переведите из радианной в градусную меру:

1) 0,3165; 2) 0,5774; 3) 1,0322; 4) 1,3588; 5) 1,4563.

116. Вычислите в радианах дугу окружности, радиус которой равен 1,24 м, а длина этой дуги равна 2,15 м.

117. Вычислите площадь сектора круга с дугой 1,32 рад и радиусом 2,26 м.

118. Площадь кругового сектора равна 0,38 м^2. Вычислите дугу сектора в радианах, если радиус круга равен 1,52 м.

119. Дуга окружности в 1,25 радиана имеет длину 2,56 м. Вычислите радиус этой окружности.

120. Круговой сектор, имеющий площадь 0,86 м^2, стягивается дугой 1,6 радиана. Вычислите радиус круга.

121. Радиусом $R = 0{,}12$ м описана дуга, радианная мера которой равна 2,5. Найдите длину этой дуги.

122. Вычислите в радианной мере величину вписанного угла, опирающегося на дугу, радианная мера которой $\frac{4}{15}\pi$.

123. Величина дуги в радианной мере равна $\frac{5\pi}{9}$. Под каким углом из точек этой дуги видна стягивающая ее хорда?

124. Вычислите (рад/с) угловые скорости $v_ч$ часовой, $v_м$ минутной и $v_с$ секундной стрелок.

125. Углы треугольника относятся как 1 : 2 : 6. Вычислите их величины в радианной мере.

ОТВЕТЫ

114. 1) 0,2583; 2) 1,227; 3) 0,2834; 4) 2,003; 5) 3,749. **115.** 1) 18°,13; 2) 33°,08; 3) 59°,14; 4) 77°,85; 5) 83°,44. **116.** 1,73 рад. **117.** 3,37 м^2. **118.** 0, 329 рад. **119.** 2,05 м. **120.** 1,04 м. **121.** 0,3 м. **122.** $\frac{2\pi}{15}$. **123.** $\frac{13\pi}{18}$. **124.** $v_ч = \frac{\pi}{21600}$, $v_м = \frac{\pi}{1800}$, $v_с = \frac{\pi}{30}$. **125.** $\frac{\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{3}$.

§ 15. Числовые значения и знаки тригонометрических функций

126. Найдите знак выражения:

1) $\dfrac{\sin 60° \cos 100° \operatorname{tg}^2 200°}{\operatorname{ctg} 300° \cos 150°}$; 2) $\dfrac{\cos 150° \operatorname{ctg}^2 280°}{\operatorname{ctg} 130° \cos 170°}$.

127. Используя единичную окружность, найдите знак разности:

1) $\sin 155° - \sin 135°$; 2) $\cos 50° - \cos 70°$;
3) $\operatorname{tg} 145° - \operatorname{tg} 140°$; 4) $\sin 35° - \operatorname{tg} 35°$;
5) $\cos 70° - \operatorname{ctg} 70°$; 6) $\operatorname{tg} 80° - \operatorname{ctg} 80°$.

128. Найдите знак произведения, используя правило знаков по четвертям:

1) $\cos 130° \operatorname{tg} 220°$; 2) $\sin 205° \cos 305°$;
3) $\operatorname{tg} 140° \operatorname{tg} 190°$; 4) $\cos 320° \operatorname{tg} 130° \operatorname{ctg} 125°$;
5) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{5} \operatorname{ctg} \frac{6\pi}{5}$; 6) $\operatorname{tg} 1{,}4 \operatorname{ctg} (-1, 2) \sin (-2, 1)$.

129. Вычислите:

1) $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\sin^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

130. Вычислите $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x$.

ОТВЕТЫ

126. 1) (–); 2) (–). **127.** 1) (–); 2) (+); 3) (+); 4) (–); 5) (–); 6) (+). **128.** 1) (–); 2) (–); 3) (–); 4) (+); 5) (+); 6) (+). **129.** 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{1}{4}$. **130.** $f(0) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

§ 16. Вычисление значений тригонометрических функций по данному значению одной из них

131. Вычислите:

1) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

2) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{7}{24}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

132. Вычислите значение функции y:

1) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, если $\operatorname{tg} x = 2$;

2) $y = \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, если $\operatorname{tg} x = 3$;

3) $y = \dfrac{\sin^2 z + \sin z\cos z + 1}{\cos^2 z + 3\sin z\cos z + 1}$, если $\operatorname{tg} z = 3$.

ОТВЕТЫ

131. 1) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{15}{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$; 4) $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{24}{7}$. **132.** 1) $\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^2 \cdot (\operatorname{tg}^4 x + 1) = \frac{17}{25}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^3 x + 1}{\operatorname{tg}^3 x - 1} = \frac{14}{13}$; 3) $\frac{2\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z + 1}{\operatorname{tg}^2 z + 3\operatorname{tg} z + 2} = \frac{11}{10}$.

§ 17. Основные тригонометрические тождества. Доказательства тождеств

Упростите выражение [133, 134].

133. 1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$;

2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

3) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

4) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$;

5) $\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

6) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$.

134. 1) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$;

2) $\sin\alpha\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$;

3) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

4) $\sin^2\alpha + \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;

5) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;

6) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha$;

7) $(1+\sin\alpha)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)$;

8) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}\alpha)^2$.

135*. Докажите тождество:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$;

2) $\sin^3\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

3) $1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

4) $\cos^2\alpha\cdot(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha) = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;

5) $(\operatorname{ctg}\alpha+1)^2+(\operatorname{ctg}\alpha-1)^2)=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}$;

6) $\operatorname{tg}^2\alpha\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)-(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2=4\operatorname{tg}^2\alpha$.

136*. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}+\dfrac{\sin x+\cos x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\sin x+\cos x$;

2) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$;

4) $\cos\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)\,(1-\operatorname{tg}\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

5) $\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta$;

6) $\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\cos^2\alpha=1$.

ОТВЕТЫ

133. 1) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$[1]; 2) 0; 3) $\dfrac{2}{\sin\alpha}$, $\alpha\neq\pi k$; 4) $\sin^2\alpha$; 5) 1; 6) 1.

134. 1) $\cos\alpha-\sin\alpha$; 2) 1; 3) 2; 4) $\cos^2\alpha$; 5) 1; 6) 0, $\alpha\neq\pi k$; 7) $\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha\neq\pi k$; 8) $\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$.

§ 18. Периодичность тригонометрических функций

Вычислите период функции [**137, 138**].

137. 1) $y=\cos 3x$; 2) $y=\cos\dfrac{x}{4}$;

3) $y=\operatorname{tg} 2x$; 4) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{5}$;

5) $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

138. 1) $y=\sin 5x-\cos 4x+1$;

2) $y=2\sin\dfrac{x}{4}-3\sin\dfrac{x}{3}$;

3) $y=\sin\dfrac{2x}{3}+\sin\dfrac{x}{5}$;

---

[1] Здесь и далее $k\in \boldsymbol{Z}$, где $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел.

4) $y = \sin \frac{3x}{4} - 3\cos \frac{5x}{8} + \cos 5x$;

5) $y = \operatorname{tg} \frac{2x}{3} - 4\operatorname{ctg} \frac{3x}{2} - 2$.

139. Вычислите:

1) $\cos 7230°$;
2) $\sin 900°$;
3) $\operatorname{tg} 1125°$;
4) $\operatorname{ctg} 1305°$.

140. Вычислите:

1) $4\sin 810° + 3\cos 720° - 3\sin 630° + 5\cos 900°$;
2) $\operatorname{tg}^2 600° + \operatorname{ctg}^2 585° + 3$;
3) $2\operatorname{tg} 945° - 4\cos 1500° - \sin 1170°$;
4) $2\sin 1080° - 2\cos 1500° + \operatorname{ctg} 930°$.

141. Вычислите:

1) $\sin 8{,}3\pi + \cos 4{,}6\pi$;
2) $\sin \frac{37\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{15\pi}{4}$;
3) $\sin 7{,}854 \cdot \operatorname{tg} 3{,}927°$;
4) $\frac{\sin(-11\pi/2) + \operatorname{tg}(-5\pi)}{\cos(-5\pi) + \operatorname{ctg}(-21\pi/4)}$.

142. Упростите выражение:

1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - 4\pi\right) + \cos^2\left(8\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2$;
2) $\sin^2(2\pi + \alpha) + \cos^2(6\pi - \alpha) + 1$;
3) $\operatorname{tg}^2\left(5\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right)$;
4) $\cos(\alpha - 4\pi)\sin(\alpha - 8\pi)\operatorname{tg}(\alpha - 13\pi)$;
5) $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)\operatorname{ctg}(\alpha - 3\pi)\sin^2(\alpha - 2\pi)$.

143*. Докажите тождество:

1) $\cos(8\pi + \alpha)\cos(4\pi - \alpha) + \sin(\alpha + 6\pi)\sin(\alpha + 4\pi) = 1$;
2) $\sin(6\pi - \alpha)\cos(10\pi + \alpha)\operatorname{tg}(7\pi - \alpha)\operatorname{ctg}(12\pi - \alpha) =$
$= -\sin\alpha\cos\alpha$;
3) $\frac{1 + \operatorname{tg}(3\pi + \alpha) + \operatorname{tg}^2(7\pi - \alpha)}{1 + \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}^2(5\pi - \alpha)} = \operatorname{tg}^2\alpha$;
4) $\frac{\cos(8\pi - \alpha)\operatorname{tg}(3\pi - \alpha)}{\sin(6\pi - \alpha)\operatorname{ctg}(5\pi - \alpha)} = -\operatorname{tg}\alpha$;
5) $\frac{\sin^2(8\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}^2(7\pi + \alpha) + 1} = \sin^4\alpha$;
6) $\frac{\operatorname{ctg}(13\pi - x) + \operatorname{tg}(4\pi + x)}{\operatorname{tg}(5\pi + x) - \operatorname{ctg}(7\pi + x)} = 1$.

ОТВЕТЫ

137. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) 8π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 5π; 5) 4π. **138.** 1) 2π; 2) 24π; 3) 30π; 4) 16π; 5) 6π. **139.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **140.** 1) 5; 2) 7; 3) -1; 4) $\sqrt{3}-1$. **141.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $-\frac{1}{2}$. **142.** 1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) $\sin^2\alpha$; 5) $\sin^2\alpha$.

§ 19. Формулы приведения

Вычислите [144, 145].

144. 1) $\sin 135°$; 2) $\cos 240°$; 3) $\operatorname{tg} 320°$; 4) $\operatorname{ctg} 140°$; 5) $\operatorname{tg} 4{,}85$; 6) $\operatorname{ctg} 150°$; 7) $\sin 340°$; 8) $\sin 2{,}15$.

145. 1) $\sin 9135° + \cos(-585°) + \operatorname{tg} 1395° + \operatorname{ctg}(-630°)$;

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) + \cos\frac{17\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{22\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{37\pi}{4}$;

3) $\sin\left(-\frac{47\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\frac{21\pi}{4} + \operatorname{tg}\left(-\frac{23\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\frac{19\pi}{6}$;

4) $\operatorname{ctg} 225° - \operatorname{ctg} 675° - \cos 495° + \cos 765°$;

5) $\dfrac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)} + \dfrac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$;

6) $\sin(-810°) + \cos(-900°) + \operatorname{tg}(-395°)\operatorname{ctg} 575°$.

146. Упростите:

1) $\sin(\alpha - 3\pi/2)\cos(2\pi-\alpha) - \sin(\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg}(\pi-\alpha) + \cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-\alpha)}$;

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) +$

$+ \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

4) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\,\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}$;

5) $\sin(\alpha-2\pi)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{tg}(\pi-\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

147*. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{tg}^2(\alpha-2\pi)}+\dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\mathrm{tg}^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=1$;

2) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot\dfrac{\mathrm{tg}(\alpha-\pi)}{\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\sin\alpha$;

3) $\dfrac{1-\mathrm{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}\cdot\dfrac{\mathrm{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1-\mathrm{ctg}^2(\alpha-2\pi)}=-1$;

4) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\alpha-\pi)-\mathrm{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=0$;

5) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$.

ОТВЕТЫ

144. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-0{,}8391$; 4) $-1{,}1918$; 5) $-7{,}14$; 6) $-\sqrt{3}$; 7) $-0{,}342$; 8) $0{,}837$. **145.** 1) -1; 2) $\sqrt{3}-1$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2+\sqrt{2}$; 5) 1; 6) -3. **146.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 4) 1; 5) 1.

§ 20. Обратные тригонометрические функции

Вычислите **[148—150]**.

148. 1) arcsin 0,7880; 2) arccos 0,9063;
3) arctg 2,145; 4) arcctg 0,9657;
5) arcsin (−0,9033); 6) arccos (−0,8995);
7) arctg 0,2562; 8) arcctg 2,234.

149. 1) $\arcsin 1 + \arccos 1 + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 1$;

2) $\arcsin 0 + \arcsin 1 + \arcsin (-1)$;

3) $\arccos 0 + \arccos 1 + \arccos (-1)$;

4) $\operatorname{arctg} (-1) + \operatorname{arcctg} (-1)$;

5) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} 0$;

6) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arctg} 0$;

7) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arcctg} 1$;

8) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

150. 1) $\sin \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg} \sqrt{3}\right)$;

2) $\operatorname{ctg} \left(\arccos 1 + 2\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;

3) $\cos \left(2\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{3}\right)$;

4) $\sin^2 \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos \frac{1}{2}\right)$.

ОТВЕТЫ

148. 1) 0,9076; 2) 0,4364; 3) 1,1346; 4) 0,8028; 5) −1,1274; 6) 2,6894; 7) 0,2508; 8) 0,4209. **149.** 1) π; 2) 0; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{\pi}{2}$; 6) $\frac{7\pi}{12}$; 7) $\frac{3\pi}{4}$; 8) $\frac{5\pi}{6}$. **150.** 1) 0; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{4}$.

§ 21. Тригонометрические уравнения. Простейшие тригонометрические неравенства

Решите уравнение [151—157].

151. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x = 1$; 4) $\operatorname{ctg} x = 2{,}05$.

152. 1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\mathrm{ctg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

153. 1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 2x = 1$;
3) $\sin x = \frac{4}{5}$; 4) $\mathrm{tg}\, 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

154. 1) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos^2 x = \frac{1}{9}$;
3) $\mathrm{tg}^2\, x = 1$; 4) $\mathrm{ctg}^2\, x = 3$.

155. 1) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$; 2) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$;
3) $5\mathrm{ctg}^2\, x - 8\,\mathrm{ctg}\, x + 3 = 0$; 4) $7\sin^2 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$.

156. 1) $\sin^2 x - 10\sin x \cos x + 21\cos^2 x = 0$;
2) $8\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x - 4 = 0$;
3) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$;
4) $\sin^2 x - 6\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 0$;
5) $9\sin^2 x + 25\cos^2 x + 32\sin x \cos x - 25 = 0$.

157. 1) $\cos^2 (\pi - x) + 8\cos (\pi + x) + 7 = 0$;
2) $2\cos^2 (x - \pi) + 3\sin (\pi + x) = 0$;
3) $3\sin^2 \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \cos (x + 4\pi) = 0$;
4) $2\,\mathrm{tg}^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3\mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$;
5) $2\sin^2 x + 5\sin \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$;
6) $\mathrm{tg}\, x(\sin x + \cos x) = 0$.

Решите неравенство **[158—160]**.

158. 1) $\sin x > 0$; 2) $\sin x < 0$; 3) $\cos x > 0$;
4) $\cos x < 0$; 5) $\mathrm{tg}\, x > 0$; 6) $\mathrm{tg}\, x < 0$.

159. 1) $\sin x < 1$; 2) $\sin x > \frac{1}{2}$; 3) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x < 1$; 5) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\mathrm{tg}\, x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

160. 1) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x < -\frac{1}{2}$;

4) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$; 5) $\operatorname{ctg} x > -1$; 6) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$.

ОТВЕТЫ

151. 1) $(-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) $26° + 180°k$. **152.** 1) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; 3) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$; 4) $\frac{2\pi}{3} + \pi k$. **153.** 1) $(-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; 2) πk; 3) $(-1)^k\arcsin\frac{4}{5} + \pi k$; 4) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$. **154.** 1) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$; 2) $\pm\arccos\frac{1}{3} + \pi k$; 3) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$. **155.** 1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $2\pi k$; 2) $\pi(2k + 1)$; 3) $\operatorname{arctg} 0{,}6 + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$. **156.** 1) $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; $\operatorname{arctg} 7 + \pi k$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi k$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; 4) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$; 5) πk; $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$. **157.** 1) $2\pi k$; 2) $(-1)^k\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi k$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$; 5) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; 6) πk; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$.

158. 1) $2\pi k < x < (2k + 1)\pi$; 2) $(2k - 1)\pi < x < 2\pi k$;
3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$;
5) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$; 6) $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi k$. **159.** 1) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;
2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; 3) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$;
4) $2\pi k < x < (k + 1)2\pi$; 5) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$;
6) $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$.

160. 1) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$; 2) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$;
3) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; 4) $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < -\frac{\pi}{3} + \pi k$;
5) $\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k$; 6) $-\frac{5\pi}{12} + \pi k < x < -\frac{\pi}{12} + \pi k$.

§ 22. Тригонометрические функции алгебраической суммы двух аргументов (формулы сложения)

Вычислите [161—163].

161. 1) $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{24}{7}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{15}{8}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

5) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

162. 1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\frac{12}{13} + \arccos\frac{15}{17}\right)$;

3) $\cos\left(\arccos\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$;

5) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$.

163. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \cos^2\alpha$;

2) $\dfrac{\cos 115^\circ \sin 305^\circ + \sin 35^\circ \cos 25^\circ}{\cos 160^\circ \sin 230^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ}$;

3) $\dfrac{\sin 40^\circ \cos 15^\circ - \cos 40^\circ \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ \cos 10^\circ - \sin 15^\circ \sin 10^\circ}$;

4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin^2\alpha$;

5) $\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$.

164*. Докажите тождество:

1) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

2) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$;

3) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1$;

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{8\operatorname{tg}\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$;

5) $\cos 15°+\sqrt{3}\sin 15°=\sqrt{2}$.

165. Решите уравнение:

1) $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$;

2) $2\sin\left(\frac{4\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{3}+x\right)=0$;

3) $\cos\frac{3x}{2}=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x$;

4) $5\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+7\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$;

5) $\sin x\sin 3x+\cos 4x=0$.

ОТВЕТЫ

161. 1) $\frac{33}{65}$; 2) $\frac{416}{425}$; 3) $\frac{24}{25}$; 0; 4) $-\frac{13}{85}$; $-\frac{77}{85}$; 5) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$; $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$. **162.** 1) 8; 2) $\frac{220}{221}$; 3) $\frac{13}{85}$; 4) $2+\sqrt{3}$; 5) $-2-\sqrt{3}$. **163.** 1) $-\frac{3}{4}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} 25°$; 4) $\cos^2\alpha$; 5) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **165.** 1) $\frac{\pi k}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi k$; 3) πk; 4) $\operatorname{arctg} 6\sqrt{3}+\pi k$; 5) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

§ 23. Тригонометрические функции удвоенного аргумента (формулы удвоения)

166. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

3) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

167. Выразите:

1) $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$;
2) $\sin 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;
3) $\cos 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;
4) $\operatorname{ctg} 3\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$;
5) $\sin 5\alpha$ через $\sin\alpha$.

168. Вычислите:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

2) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4) $\cos\left(2\arccos\frac{2}{3}\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{7}{25}\right)$.

169. Упростите:

1) $1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{4}{3}x\right)$;

2) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}\right) - 1$;

3) $1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{2}\right)$;

4) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - 1$;

5) $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3$.

170*. Докажите тождество:

1) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

2) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

4) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

171. Решите уравнение:

1) $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$;

2) $\sin x + \sin 2x - \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

3) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = 0$;

4) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$;

5) $\sin 2x - \sin x = 0$.

ОТВЕТЫ

166. 1) $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7}$; 2) $\sin 2\alpha = -\frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{120}{119}$; 3) $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$; 4) $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$. **167.** 1) $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; 2) $4\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha$; 3) $\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \sin^4\alpha$; 4) $\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$; 5) $16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$. **168.** 1) $-\frac{7}{15}$; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) $\frac{7}{20}$; 4) $-\frac{1}{9}$; 5) $\frac{175}{288}$. **169.** 1) $-\sin\frac{8}{3}x$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\sin 5\alpha$; 4) $\sin\alpha$; 5) $8\cos^4\alpha$. **171.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{4} + \pi k$; 3) πk; 4) πk; 5) πk, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

§ 24. Тригонометрические функции половинного аргумента (формулы деления)

Вычислите [172, 173].

172. 1) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

173. 1) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$;

2) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$;

3) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{2}$;

5) $\frac{5\cos\alpha + 4}{10\sin\alpha - 1}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

174*. Докажите тождество:

1) $\sin^4\frac{\alpha}{2} - \cos^4\frac{\alpha}{2} = -\cos\alpha$;

2) $\frac{(\sin(\alpha/2) + \cos(\alpha/2))^2}{1 - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)} + \frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \operatorname{tg}\alpha$;

4) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

5) $\frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} = \sin\alpha$.

175. Решите уравнение:

1) $8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x\cos 2x = 1$;

2) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$;

3) $1 + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}$;

4) $1 + \cos x = \cos\frac{x}{2}$.

ОТВЕТЫ

172. 1) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$; 3) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{2}$; 4) $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **173.** 1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$; 5) $\frac{1}{7}$. **175.** 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; 2) $2\pi k$; $\pi(1 + 4k)$; 3) $4\pi k$; $\pi(2k + 1)$; 4) $\pi(2k + 1)$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$.

§ 25. Преобразование произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму

Преобразуйте в сумму [176, 177].

176. 1) $\sin 45° \sin 15°$; 2) $\cos 35° \sin 33°$;

3) $\cos 50° \cos 15°$; 4) $\cos \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$;

5) $4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; 6) $12\sin(-9\alpha)\sin 4\alpha$;

7) $\cos(\alpha+\beta)\cos(2\alpha+\beta)$; 8) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$.

177. 1) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$; 2) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

3) $2\sin(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$; 4) $4\sin 16\alpha \sin 4\alpha$;

5) $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}$; 6) $\cos 7x \cos 5x$.

178. Представьте в виде суммы первых степеней:

1) $\sin^4 x$; 2) $\cos^4 x$; 3) $\sin^5 x$.

179*. Докажите тождество:

1) $\sin 2\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 3\alpha)$;

2) $\sin 3\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$;

3) $2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2 x + \cos x - 1$;

4) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$;

5) $\sin 8x \sin 2x = \sin^2 5x - \sin^2 3x$;

6) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

180. Решите уравнение:

1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 1$;

2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$;

3) $\sin 2x\cos 5x - \sin 3x\cos 4x = 0$;

4) $\cos 5x\cos 7x = \cos^2 6x$;

5) $\sin x\sin 11x - \sin 3x\sin 9x = 0$;

6) $\sin x\sin 7x = \sin 4x - \frac{1}{3}$.

176. 1) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$ $(\cos 22^\circ - \sin 2^\circ)$; 3) $(\cos 65^\circ + \cos 135^\circ)$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) $2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$; 6) $6(\cos 13\alpha - \cos 5\alpha)$; 7) $\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos(3\alpha + 2\beta)$; 8) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$. **177.** 1) $\sqrt{3} + 2\cos 2x$; 2) $2 + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$; 3) $\sin 2x + \sin 2\alpha$; 4) $2(\cos 12\alpha - \cos 20\alpha)$; 5) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{3\pi}{5}\right)$; 6) $\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 12x)$. **178.** $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$; 2) $\frac{3}{8} + \cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$; 3) $\frac{5}{8}\sin x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{1}{16}\sin 5x$. **180.** 1) $\frac{\pi}{6} + \pi k$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; 3) πk; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; 4) πk; 5) $\frac{\pi k}{8}$; 6) $\pm\frac{1}{6}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{3}$.

§ 26. Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение

Преобразуйте в произведение [181—183].

181. 1) $\sin 60^\circ + \sin 40^\circ$; 2) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$;
3) $\cos 10^\circ - \sin 20^\circ$; 4) $\cos 20^\circ - \cos 80^\circ$;
5) $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ$; 6) $\operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ$.

182. 1) $\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$; 2) $\sin\frac{\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}$;
3) $\sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{14} - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{14}$;
5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; 6) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$;
7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; 8) $3 - \operatorname{tg}^2 20^\circ$.

183. 1) $\sin 2\alpha\cos 3\alpha - 2\sin^2\alpha\sin 3\alpha$;
2) $\sin^2 5\alpha - \sin^2 3\alpha$;
3) $\sin\alpha\cos\beta + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta$;
4) $\sin 10^\circ + 2\sin 5^\circ\cos 15^\circ + \cos 50^\circ$;

5) $\sin 16^\circ + \sin 26^\circ - \sin 42^\circ$;

6) $\sin 25^\circ + \sin 37^\circ + \sin 27^\circ + \sin 35^\circ$.

184*. Покажите, что для углов A, B и C ($A + B + C = 180^\circ$) всякого треугольника имеет место соотношение:

1) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

2) $1 - \cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

3) $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$;

4) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

185. Преобразуйте в произведение с помощью вспомогательного аргумента:

1) $\frac{1}{2} + \cos\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha$; 3) $1 - 2\sin\alpha$;

4) $1 + 2\sin\alpha$; 5) $1 + \operatorname{tg}\alpha$; 6) $1 - \operatorname{tg}^2\alpha$;

7) $1 - \operatorname{ctg}^2\alpha$; 8) $\sqrt{3} + 2\cos\alpha$.

186*. Докажите тождество:

1) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$;

4) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(3\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2) - \operatorname{ctg}(3\alpha/2)} = -\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$;

5) $\frac{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

6) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$.

187. Решите уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$; 2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;

3) $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x$; 4) $\sin 2x = \cos x - \cos 3x$;

5) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$; 6) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin 2x$.

181. 1) $2\sin 50^\circ \cos 10^\circ$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 3) $\sin 40^\circ$; 4) $\sin 50^\circ$; 5) $\cos 10^\circ$; 6) $\frac{\sin 5^\circ}{\cos 25^\circ \cos 20^\circ}$. **182.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sin(\pi/7)}{\cos(3\pi/14)\cos(5\pi/14)}$; 5) $\frac{2}{\cos 2x}$; 6) $\sqrt{3}\sin\alpha$; 7) $\frac{2}{\cos 2\alpha}$; 8) $8\cos 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ$. **183.** 1) $2\sin\alpha\cos 4\alpha$; 2) $\sin 8\alpha \sin 2\alpha$; 3) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$; 4) $\cos 10^\circ$; 5) $4\sin 8^\circ \sin 13^\circ \sin 21^\circ$; 6) $4\sin 31^\circ \cos 5^\circ \cos 1^\circ$. **185.** 1) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 5) $\frac{\sqrt{2}\sin(\pi/4+\alpha)}{\cos\alpha}$; 6) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 7) $-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$; 8) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **187.** 1) πk; 2) $\pi k \pm \frac{\pi}{4}$; $2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi k}{2}$; 4) $\frac{\pi k}{2}$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; 5) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; 6) $-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$; $\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}$.

Глава 4. Пределы и производные

§ 27. Предел функции

Найдите [188—196].

188. 1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+4)$;   2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+x^2+8x+10)$;   4) $\lim\limits_{x\to 2}((x^2-1)(x-3)(x-5))$;

5) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$;   6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

189. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}$;   2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{3x^2+2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$;   4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+x}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$;   6) $\lim\limits_{x\to(-3/2)}\frac{4x^2-9}{2x+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

190. 1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$;

3) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 7x - 6}$; 4) $\lim\limits_{x\to(-2/3)} \dfrac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 8x + 4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3 - \sqrt{x}}{4 - \sqrt{2x - 2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

191. 1) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{3}{x^3 + 1} - \dfrac{1}{x + 1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - 5x + 6)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^2 + 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{x - 2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 8}{2x - 2}$.

192. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 4x^2 + 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + i}{x^3 + 2x^2 + x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$.

193. 1) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to(\pi/4)} \dfrac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x - 1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - 1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 3x}{x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x^4}$.

194. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x \cos x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x + \sin x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)} \dfrac{\cos x}{\pi/2 - x}$.

195. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{4x}\right)^{x}$;

3) $\lim\limits_{z\to 0}(1+4z)^{\frac{3}{5z}}$; 4) $\lim\limits_{z\to 0}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-z}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

196. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{2}{3x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-x}$.

ОТВЕТЫ

188. 1) 6; 2) –1; 3) 10; 4) 9; 5) –6; 6) 3. **189.** 1) ∞; 2) ∞; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) $\frac{1}{6}$; 6) –6; 7) $\frac{1}{5}$; 8) 3. **190.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) 3; 3) 1; 4) $\frac{1}{4}$; 5) 6; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{2}{3}$. **191.** 1) 1; 2) ∞; 3) 0; 4) 5; 5) 3; 6) $\frac{1}{2}$. **192.** 1) 2; 2) 3; 3) ∞; 4) ∞; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5}{2}$. **193.** 1) 2; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) –2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 27; 6) ∞. **194.** 1) 2; 2) 4; 3) 0; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) 1. **195.** 1) $e^{2/3}$; 2) $e^{-(5/4)}$; 3) $e^{(12/5)}$; 4) $\frac{1}{e}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 6) e. **196.** 1) $e^{4/9}$; 2) $e^{10/3}$; 3) e^{-3}; 4) $e^{\ 3}$.

§ 28. Производная степени и корня

Найдите производную функции y [197, 198].

197. 1) $y = 4x^3$; 2) $y = 3x^{\ 4}$; 3) $y = 4x^{3/4}$;

4) $y = \sqrt[3]{x^2}$; 5) $y = \sqrt[3]{8x}$; 6) $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^{\ 2}}$.

198. 1) $y = \frac{2}{x^3}$; 2) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

4) $y = \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$; 5) $y = \frac{1}{\sqrt{4x^3}}$; 6) $y = \frac{1}{\sqrt{x^{2/3}}}$.

Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента x **[199—201]**.

199. 1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - x - 1, \qquad x = -1;$

2) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4x - 1, \qquad x = -1;$

3) $f(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5, \qquad x = 2.$

200. 1) $f(x) = (2x^3 - 1)(x^2 + 1), \qquad x = 1;$

2) $f(x) = (3 - x^2)(4 + x^2), \qquad x = -2;$

3) $f(x) = (x^3 + x^2)(x^2 - 1), \qquad x = -1.$

201. 1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, \qquad x = -2;$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}, \qquad x = 1;$

3) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}, \qquad x = 2.$

ОТВЕТЫ

197. 1) $12x^2$; 2) $-12x^{-5}$; 3) $3x^{(1/4)}$; 4) $\frac{2}{3}x^{-(1/3)}$; 5) $\frac{2}{3}x^{-(2/3)}$; 6) $-\frac{1}{3}x^{(5/3)}$.

198. 1) $-6x^{4}$; 2) $-x^{-(3/2)}$; 3) $-\frac{1}{3}x^{-(4/3)}$; 4) $-4x^{-(5/3)}$; 5) $-\frac{3}{4}x^{-(5/2)}$; 6) $-\frac{1}{3}x^{-(4/3)}$.

199. 1) 17; 2) -4; 3) 64. **200.** 1) 14; 2) 36; 3) 0. **201.** 1) $\frac{8}{9}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{5}$.

§ 29. Производная сложной функции (функции от функции)

Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента x **[202—207]**.

202. 1) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4, \qquad x = -1;$

2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 3)^7, \qquad x = 1;$

3) $f(x) = (3x - 1)^4, \qquad x = 1.$

203. 1) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}, \qquad x = 2;$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2}, \qquad x = 2;$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^2}, \qquad x = 1.$

204. 1) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $\quad x = \sqrt{3}$;

2) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, $\quad x = 2$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, $\quad x = 3$.

205. 1) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$, $\quad x = \sqrt{3}$;

2) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}$, $\quad x = \sqrt{2}$;

3) $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$, $\quad x = \sqrt{3}$.

206. 1) $f(x) = \dfrac{6\sqrt{x^2 + 1}}{x}$, $\quad x = 2\sqrt{2}$;

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$, $\quad x = \sqrt{5}$;

3) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $\quad x = \sqrt{3}$.

207. 1) $f(x) = \dfrac{9x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $\quad x = 2\sqrt{2}$;

2) $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $\quad x = \sqrt{5}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $\quad x = \sqrt{3}$.

ОТВЕТЫ

202. 1) 0; 2) 0; 3) 24. **203.** 1) $-\frac{12}{49}$; 2) $-\frac{8}{27}$; 3) $-\frac{2}{9}$. **204.** 1) $-\sqrt{3}$; 2) 1; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **205.** 1) $\frac{7}{2}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $6\sqrt{3}$. **206.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{2 - \sqrt{3}}{8}$. **207.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$.

§ 30. Геометрические приложения производной

208. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе в данной на ней точке:

1) $y = -x^2 + x$ в точке $x = -2$;

2) $y = x^2 - 3x + 2$ в точке $x = 3$.

209. 1) Найдите угол наклона параболы $y = x^2 - 2x$ к оси Ox в точке $x = 2$.

2) Найдите угол наклона касательной к кривой $y = x^3$, проведенной в точке $x = -2$ к оси Ox.

210. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой:

1) $y = x^2 - 7x + 10$ в точке $x = 4$;

2) $y = 2x^3$ в точке $x = -1$.

211. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y = x^2 + 3x - 10$ образует угол $135°$ с осью Ox.

212. Найдите, под какими углами парабола $y = x^2 + 2x - 8$ пересекает ось Ox.

ОТВЕТЫ

208. 1) 5; 2) 3. **209.** 1) $\approx 63{,}4°$; 2) $\approx 85{,}2°$. **210.** 1) $y = x - 6$; $y = -x + 2$; 2) $y = 6x + 4$; $y = -\frac{1}{6}x - \frac{13}{6}$. **211.** $(-2; -12)$. **212.** $\operatorname{arctg}(-6)$, $\operatorname{arctg} 6$.

§ 31. Физические приложения производной

213. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 + 5t^2 + 4$. Найдите величины скорости и ускорения в момент времени $t = 2$ с.

214. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2 - 8t + 4$. В какой момент времени t_0 скорость точки окажется равной нулю?

215. Тело массой $m = 12$ кг движется прямолинейно по закону $S = t^2 + 2t + 3$. Найдите кинетическую энергию тела $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 5 с после начала движения. Здесь v — скорость тела.

216. Зависимость температуры тела T от времени t задана уравнением $T = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 10$ с?

217. Сила тока I (А) изменяется в зависимости от времени t(с) по закону $I = 3t^2 + 2t + 1$. Найдите скорость изменения силы тока через 8 с.

ОТВЕТЫ

213. 32 м/с; 22 м/с^2. **214.** $t_0 = 4$ с. **215.** 864 Дж. **216.** 8 град/с. **217.** 50 А/с.

§ 32. Производные тригонометрических функций. Производные обратных тригонометрических функций

Найдите производную тригонометрической функции [218, 219].

218. 1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \cos 2x$;
3) $y = \operatorname{tg} x - x$; 4) $y = \operatorname{ctg} x + x$;
5) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; 6) $y = \sin t \cos t$;
7) $y = \sin x(1 + \cos x)$; 8) $v = \dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$.

219. 1) $y = \sin^2 2x$; 2) $y = \cos^2 x$;
3) $y = \operatorname{tg}^2 x$; 4) $y = \operatorname{ctg}^2 x$;
5) $y = \sin^2 2x$; 6) $S = \sqrt{\sin 2\varphi}$;
7) $y = \sqrt[3]{\sin^2 2x}$; 8) $y = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$.

220. Вычислите производную тригонометрической функции при данном значении аргумента x:
1) $f(x) = \sin^2 2x$, $x = \pi/16$;
2) $f(x) = \cos^2 2x$, $x = \pi/16$;
3) $f(x) = \operatorname{tg}^2 3x$, $x = \pi/12$;
4) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x \sin x$, $x = \pi/3$;
5) $f(x) = 8\sin^2 x \cos x$, $x = \pi/4$;
6) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x$, $x = \pi/4$;
7) $f(x) = \cos 2x(1 + \sin 2x)$, $x = \pi/8$;
8) $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 2x}$, $x = \pi/4$.

221. Вычислите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S = 4\sin 3t$, в момент времени $t_0 = \frac{\pi}{9}$. Здесь S — путь (м), t — время (с).

222. Вычислите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S = \operatorname{tg} 2t$ в момент времени $t_0 = \frac{\pi}{6}$. Здесь S — путь (м), t — время (с).

223. Вычислите $f'(x)$ при данном значении аргумента x:

1) $f(x) = \arcsin x + 2\arccos x$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $f(x) = \arcsin 2x$, $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

3) $f(x) = \arccos \sqrt{3x}$, $x = \frac{1}{9}$;

4) $f(x) = \mathrm{arctg}\, 3x$, $x = \frac{1}{3}$;

5) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$, $x = \sqrt{2}$;

6) $f(x) = (\arcsin x)^2$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $f(x) = \arccos \frac{2}{x} x$, $x = \sqrt{5}$;

8) $f(x) = \mathrm{arcctg}\, \frac{2x}{1 - x^2}$, $x = \frac{1}{2}$.

ОТВЕТЫ

218. 1) $3\cos 3x$; 2) $-2\sin 2x$; 3) $\mathrm{tg}^2\, x$; 4) $-\mathrm{ctg}^2\, x$; 5) $\frac{4}{\sin^2 2x}$; 6) $\cos 2t$; 7) $\cos x + \cos 2x$; 8) $\frac{2\sin t}{(1 + \cos t)^2}$. **219.** 1) $2\sin 4x$; 2) $-\sin 2x$; 3) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 4) $-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$; 5) $2\sin 4x$; 6) $\mathrm{ctg}\, 2\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}$; 7) $\frac{4}{3}\mathrm{ctg}\, 2x\sqrt[3]{\sin^2 2x}$; 8) $\frac{1}{\cos^6 x}$.
220. 1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) 12; 4) 13,5; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 8; 7) $-\sqrt{2}$; 8) -2.
221. 6 м/с. **222.** 8 м/с. **223.** 1) -2; 2) 4; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{4}{3}\pi$; 7) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; 8) $\frac{8}{5}$.

§ 33. Производные логарифмических и показательных функций

Вычислите производную [224—226].

224. 1) $y = x\ln x$;
2) $y = (\ln x - 1)x$;
3) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
4) $y = \lg 2x$;
5) $f(t) = 2\lg(t + 1)$, $t = 1$;
6) $y = \ln \sin x$;
7) $f(x) = -\ln \cos x$; $x = \pi/4$;
8) $f(x) = \ln \mathrm{tg}\, 2x$.

225. 1) $y = \ln\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x$; 2) $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$;

3) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; 4) $y = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$;

5) $f(x) = \ln\cos^2 x$, $x = \pi/4$;

6) $f(x) = \ln \operatorname{tg}^2 x$, $x = \pi/4$;

7) $f(x) = \ln\sin^2 2x$, $x = \pi/8$;

8) $f(x) = \ln \operatorname{ctg}^2 x$, $x = \pi/4$.

226. 1) $y = e^{-3x}$; 2) $y = x^2e^{2x}$;

3) $y = \frac{1 - e^x}{e^x}$; 4) $f(x) = 3\ln x + e^x$, $x = 1$;

5) $y = 3^x$; 6) $y = \frac{e^x}{2^x}$;

7) $y = 2\lg x$; 8) $y = \lg(2x + 1)$.

ОТВЕТЫ

224. 1) $1 + \ln x$; 2) $\ln x$; 3) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$; 4) $\frac{0{,}4343}{x}$; 5) 0,4343; 6) $\operatorname{ctg} x$; 7) 1; 8) $-\frac{4}{\sin 4x}$. **225.** 1) $\operatorname{ctg} x\cos^2 x$; 2) $\frac{1}{\cos x}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 5) -2; 6) 4; 7) 4; 8) -4. **226.** 1) $-3e^{-3x}$; 2) $2xe^{2x}(1 + x)$; 3) $-\frac{1}{e^x}$; 4) $3 + e$; 5) $3^x\ln 3$; 6) $\frac{e^x - \ln 2}{2^x}$; 7) $\frac{0{,}8686}{x}$; 8) $\frac{0{,}8686}{2x + 1}$.

§ 34. Исследование функций с применением производной

227. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - 6x + 5$; 2) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

3) $y = -x^2 + 4x + 1$; 4) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

5) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$; 6) $y = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 20$;

7) $y = x^4 - 4x + 4$; 8) $y = -\frac{1}{4}x^4 - x - 1$;

9) $y = \frac{1}{2x}$; 10) $f(x) = \frac{1}{3x - 2}$;

11) $y = \ln x^2$; 12) $y = \ln \frac{1}{x}$;

13) $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$; 14) $y = e^{-x}$;

15) $y = e^{1/x}$; 16) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$.

228. Исследуйте функцию на экстремум:

1) $y = x^2 - 8x + 12$; 2) $y = x^2 - 10x + 9$;

3) $y = -x^2 + 2x + 3$; 4) $y = -2x^2 + x + 1$;

5) $y = 2x^4 - x$; 6) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 8x$;

7) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$; 8) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$;

9) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$; 10) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$;

11) $f(x) = e^x + e^{-x}$; 12) $f(x) = x^2e^{-x}$;

13) $f(x) = x - 2\ln x$; 14) $f(x) = x\ln x$.

229. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции в заданном промежутке:

1) $y = x^2 - 6x + 3$, $x \in [0; 5]$;

2) $y = x^2 - 8x + 4$, $x \in [-2; 2]$;

3) $y = x - \frac{1}{4}x^2$, $x \in [-2; 4]$;

4) $y = x^2 - 6x + 13$, $x \in [0; 6]$;

5) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, $x \in [1; 3]$;

6) $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10$, $x \in [0; 3]$.

230. Каким должен быть прямоугольник наибольшей площади, который можно согнуть из куска проволоки длиной 50 см?

231. Из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса R, найдите тот, который имеет наибольшую площадь.

232. В равносторонний треугольник с периметром $3m$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите длины его сторон.

233. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади (основание прямоугольника лежит на основании треугольника). Найдите длины сторон прямоугольника.

234. В прямоугольный треугольник с катетами, равными a и b, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Найдите длины сторон прямоугольника.

235. Найдите прямоугольник наибольшей площади, вписанный в полукруг радиуса R.

236. Найдите прямоугольник с наибольшим периметром, вписанный в полукруг радиуса R.

237. Из всех треугольников, у которых сумма основания и высоты $b + h = a$, найдите тот, у которого площадь наибольшая.

238. Из всех прямоугольников данного периметра $2p$ найдите тот, у которого диагональ наименьшая.

239. Число 8 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

240. Произведение двух положительных чисел равно a. Чему равны эти числа, если их сумма будет наименьшей?

241. Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $S = -t^3 + 3t^2 + 9t + 3$. Найдите максимальную скорость движения тела. Здесь S — путь (м), t — время (с).

242. Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением $S = 19{,}6t - 4{,}9t^2$. Найдите наибольшую высоту подъема тела. Здесь S — путь (м), t — время (с).

243. Исследуйте на направление выпуклости кривую:

1) $y = -\frac{1}{x}$ в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$ в точках $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

244. Найдите промежутки выпуклости кривой:

1) $y = 2x^3$;
2) $y = x^2$;
3) $y = -x^2 - 1$;
4) $y = x^2 + 3x - 1$;
5) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$;
6) $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 24x + 8$.

245. Найдите точки перегиба кривой:

1) $f(x) = x^3 - x$;

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$;

3) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$;

4) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$.

ОТВЕТЫ

227. 1) Убывает на $(-\infty; 3)$, возрастает на $(3; +\infty)$; 2) убывает на $(-\infty; 1)$, возрастает на $(1; +\infty)$; 3) возрастает на $(-\infty; 2)$, убывает на $(2; +\infty)$; 4) возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(2; +\infty)$, убывает на $(0; 2)$; 5) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(1; +\infty)$, возрастает на $(0; 1)$; 6) убывает на $(-\infty; 2)$ и на $(3; +\infty)$, возрастает на $(2; 3)$; 7) убывает на $(-\infty; 1)$, возрастает на $(1; +\infty)$; 8) возрастает на $(-\infty; -1)$, убывает на $(-1; +\infty)$; 9) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; 10) убывает на $(-\infty; 2/3)$ и на $(2/3; +\infty)$; 11) убывает на $(-\infty; 0)$, возрастает на $(1; +\infty)$; 12) убывает на $(0; +\infty)$; 13) убывает на $(0; 1)$, возрастает на $(0; +\infty)$; 14) убывает на $(-\infty; +\infty)$; 15) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; 16) убывает на $(-\infty; 0)$, возрастает на $(3; +\infty)$.

228. 1) min $(4; -4)$; 2) min $(5; -16)$; 3) max $(1; 4)$; 4) max $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{8}\right)$; 5) min $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 6) max $(2; 12)$; 7) max $\left(-2; \frac{16}{3}\right)$; min $\left(2; -\frac{16}{3}\right)$; 8) max $(0; 0)$, min $\left(2; -\frac{4}{3}\right)$; 9) max $(1; -3)$, min $(2; -4)$; 10) max $(-1; 15)$, min $(2; -12)$; 11) min $(0; 2)$; 12) max $(2; 4e^2)$, min $(0; 0)$; 13) min $(2; 2 - 2\ln 2)$; 14) min $\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$. **229.** 1) $y(3) = -6$, $y(0) = 3$; 2) $y(4) = -12$, $y(0) = 4$; 3) $y(4) = 0$, $y(2) = y(-2) = 1$; 4) $y(3) = 4$, $y(0) = y(6) = 13$; 5) $y(3) = -\frac{9}{2}$, $y(1) = \frac{1}{6}$; 6) $y(2) = -10$, $y(0) = 10$.

230. Квадрат со стороной 12,5 см. **231.** Квадрат со стороной $R\sqrt{2}$. **232.** $\frac{m\sqrt{3}}{4}$, $\frac{m}{2}$. **233.** $\frac{a}{2}$, $\frac{h}{2}$. **234.** $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{2(a^2+b^2)}$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. **235.** Отношение сторон прямоугольника составляет 1 : 2. **236.** Отношение сторон прямоугольника составляет 1 : 4. **237.** $b = h = \frac{a}{2}$. **238.** Квадрат со стороной $p/2$. **239.** 4 + 4. **240.** $\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}$. **241.** 12 м/с. **242.** 19,6 м. **243.** 1) В точке x_1 выпукла вниз, в точке x_2 выпукла вверх; 2) в точках x_1, x_2 выпукла вниз. **244.** 1) Выпукла вверх на $(-\infty; 0)$, выпукла вниз на $(0; +\infty)$; 2) всюду выпукла вниз; 3) всюду выпукла вверх; 4) всюду выпукла вниз; 5) выпукла вверх на $(-\infty; 2)$, выпукла вниз на $(2; +\infty)$; 6) выпукла вниз на $(-\infty; -1)$ и на $(2; +\infty)$; выпукла вверх на $(-1; 2)$. **245.** 1) $(0; 0)$; 2) $(3; 2)$; 3) $(1; -6)$; $(3; -86)$; 4) $(1; -3)$, $(2; 6)$.

§ 35. Дифференциал функции. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

246. Найдите дифференциал функции:

1) $y = (1 - x)^5$; 2) $y = \sqrt{4 - 2x^2}$;

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}$; 4) $y = \ln \cos^2 x$;

5) $y = \ln \operatorname{tg} 2x$; 6) $y = 2^{3x}$;

7) $y = e^x \sin x$; 8) $y = 1 + e^{-x}$.

247. Вычислите приближенное значение приращения функции:

1) $y = 3x^2 + 5x + 1$ при $x = 3$, $\Delta x = 0{,}001$;

2) $y = x^3 + x - 1$ при $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$;

3) $y = 2x^2 + 3$ при $x = 2$, $\Delta x = 0{,}001$;

4) $y = x^3 - 5x^2 + 80$ при $x = 4$, $\Delta x = 0{,}001$;

5) $y = \ln x$ при $x = 10$, $\Delta x = 0{,}01$;

6) $v = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ при $R = 20$, $\Delta R = 0{,}01$;

7) $y = \sin 2x$ при $x = \dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x = 0{,}02$;

8) $y = \ln x^2$ при $x = 20$, $\Delta x = 0{,}01$.

248. Вычислите приближенное значение функции:

1) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ при $x = 2{,}01$;

2) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ при $x = 3{,}02$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 4$ при $x = 1{,}1$;

4) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ при $x = 0{,}001$;

5) $f(x) = x^4 - 1$ при $x = -3{,}3$;

6) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ при $x = 1{,}1$;

7) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$ при $x = 3{,}03$;

8) $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 1$ при $x = 3{,}02$.

249. Вычислите приближенное значение степени:

1) $(9{,}06)^2$; 2) $(1{,}012)^3$; 3) $(9{,}95)^3$;

4) $(1{,}005)^{10}$; 5 $(0{,}975)^4$; 6) $(0{,}988)^3$.

250. Вычислите приближенное значение корня:

1) $\sqrt[3]{1{,}012}$; 2) $\sqrt{25{,}16}$;

3) $\sqrt{24{,}84}$; 4) $\sqrt{101}$;

5) $\sqrt{99{,}5}$; 6) $\sqrt[10]{1{,}03}$.

251. Вычислите приближенное значение величины, обратной данной:

1) 0,99; 2) 9,93;

3) $(1{,}004)^2$; 4) 0,998.

252. Вычислите относительную погрешность функции:

1) $S = 2\pi R$, если $R = 50$ см, $\Delta R = 0{,}5$ см;

2) $y = x^3$, если $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$;

3) $v = \frac{4}{3}\pi R^3$, если $R = 300$, $\Delta R = 0{,}3$.

253. Составьте формулу для вычисления относительной погрешности функции:

1) $y = \sin^2 3x$; 2) $y = \mathrm{tg}^2\, x$; 3) $y = e^{\sin^2 x}$.

ОТВЕТЫ

246. 1) $-5(1 - x)^4\,dx$; 2) $-\frac{2x\,dx}{\sqrt{4-2x^2}}$; 3) $-\frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^3}}$; 4) $-2\,\mathrm{tg}\,x\,dx$; 5) $\frac{4\,dx}{\sin 4x}$; 6) $3\ln 2\cdot 2^{3x}\,dx$; 7) $e^x\cdot(\sin x+\cos x)\,dx$; 8) $-e^{-x}\,dx$. **247.** 1) $\approx 0{,}023$; 2) $\approx 0{,}13$; 3) $\approx 0{,}008$; 4) $\approx 0{,}008$; 5) $\approx 0{,}001$; 6) $\approx 16\,\pi$; 7) $\approx 0{,}02$; 8) 0,001. **248.** 1) $\approx 7{,}07$; 2) $\approx 19{,}18$; 3) $\approx 2{,}83$; 4) $\approx 1{,}001$; 5) $\approx 112{,}4$; 6) $\approx 0{,}5375$; 7) $\approx 18{,}6$; 8) 87,6. **249.** 1) 82,08; 2) 1,036; 3) 985; 4) 1,05; 5) 0,9; 6) 0,964. **250.** 1) 1,004; 2) 5,016; 3) 4,984; 4) 10,05; 5) 9,975; 6) 1,003. **251.** 1) 1,01; 2) 0,1007: 3) 0,992; 4) 1,002. **252.** 1) 1%; 2) $\approx 1{,}5\%$; 3) 0,3%. **253.** 1) $6\,\mathrm{ctg}\,3x\cdot dx$; 2) $\frac{4dx}{\sin 2x}$; 3) $\sin 2x\cdot dx$.

Глава 5. Интегралы

§ 36. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование

Вычислите интеграл [254—259].

254. 1) $\int 3x^2\,dx$; 2) $\int x^4\,dx$; 3) $\int x^{(m-1)}\,dx$;
4) $\int 4t^3\,dt$; 5) $\int \frac{dx}{x^{-2}}$.

255. 1) $\int (2x^2-1)^2\,dx$; 2) $\int x^3(1-6x^2)\,dx$;
3) $\int (3x^{-4}+8x^{-5})\,dx$; 4) $\int (x^{-4}-x^{-3}-3x^{-2}+1)\,dx$;
5) $\int (5u^{3/2}-7u^{3/4})\,du$.

256. 1) $\int 5^x\,dx$; 2) $\int 4^{2x}\,dx$; 3) $\int (e^x+2x)\,dx$;
4) $\int (3^x-e^x-1)\,dx$; 5) $\int \frac{2dx}{x+3}$.

257. 1) $\int (\sin x-5)\,dx$; 2) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx$; 3) $\int \sin 6x\,dx$;
4) $\int (4-3\cos x)\,dx$; 5) $\int \cos 4x\,dx$.

258. 1) $\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin x-1}$; 2) $\int \frac{\sin x\,dx}{2-\cos x}$; 3) $\int \frac{\cos x\,dx}{3+2\sin x}$;
4) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; 5) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$.

259. 1) $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$;
4) $\int \frac{dx}{25+x^2}$; 5) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

ОТВЕТЫ

254. 1) x^3+C; 2) $\frac{1}{5}x^5+C$; 3) $\frac{1}{m}x^m+C$; 4) t^4+C; 5) $\frac{1}{3}x^3+C$. **255.** 1) $\frac{4}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+x+C$; 2) $\frac{1}{4}x^4-x^6+C$; 3) $-x^{-3}-2x^{-4}+C$; 4) $-\frac{1}{3}x^{-3}+\frac{1}{2}x^{-2}+3x^{-1}+x+C$; 5) $2u^{(5/2)}-4u^{(7/4)}+C$. **256.** 1) $\frac{5^x}{\ln 5}+C$; 2) $\frac{4^{2x}}{2\ln 4}+C$; 3) e^x+x^2+C; 4) $\frac{3^x}{\ln 3}-e^x-x+C$; 5) $2\ln|x+3|+C$. **257.** 1) $-\cos x-5x+C$;

2) $-2\cos x + C$; 3) $-\frac{1}{6}\cos 6x + C$; 4) $4x - 3\sin x + C$; 5) $\frac{1}{4}\sin 4x + C$.

258. 1) $\frac{1}{3}\ln|3\sin x - 1| + C$; 2) $\ln(2 - \cos x) + C$; 3) $\frac{1}{2}\ln(3 + 2\sin x) + C$; 4) $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C$; 5) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x + 2) + C$. **259.** 1) $2\arcsin x + C$; 2) $\arcsin\frac{u}{\sqrt{5}} + C$; 3) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}} + C$; 4) $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{5} + C$; 5) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{6}}{2} + C$.

§ 37. Геометрические и физические приложения неопределенного интеграла

260. Найдите функцию, производная которой $y' = 4x^3 - 2x + 3$.

261. Найдите функцию, дифференциал которой $\mathrm{d}y = (2x + 6)\,\mathrm{d}x$.

262. Найдите функцию, производная которой $y' = 2x - 5$, если при $x = -3$ эта функция принимает значение, равное 28.

263. Найдите функцию, обращающуюся в нуль при $x = 0$, если $y' = 3x^2 - 4x + 5$.

264. Найдите функцию, производная которой $y' = 3e^x + 2x$, если при $x = 0$ эта функция принимает значение, равное 8.

265. Найдите $\int(\sin x + 3\cos x)\,\mathrm{d}x$, если при $x = \pi$ первообразная функция равна 4.

266. Найдите $\int(\cos x - e^x + 2x)\,\mathrm{d}x$, если при $x = 0$ первообразная функция равна 3.

267. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $-3x$.

268. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $x + 2$.

269. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $-\frac{y}{x}$.

270. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $\frac{x}{y}$.

271. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $-\frac{x}{y}$.

272. Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен $\frac{x}{3}$.

273. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку (1; 4), если угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке равен $3x^2 - 2x$.

274. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку (−1; 3), если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен утроенному квадрату абсциссы точки касания.

275. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку (0; e), если угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен y.

276. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = t^2 - 8t + 2$. Найдите закон движения точки.

277. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = 4t - 3t^2$. Найдите закон движения точки.

278. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $v = 2t - 3$. Найдите закон движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь 6 м.

279. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $v = 3t^2 + 4t - 1$. Найдите закон движения точки, если в начальный момент времени она находилась в начале координат.

280. Скорость прямолинейного движения точки задана формулой $v = 2\cos t$. Найдите закон движения точки, если в момент $t = \pi/6$ точка находилась на расстоянии $S = 4$ м от начала отсчета.

281. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найдите закон движения этого тела (сопротивлением воздуха пренебречь).

282. Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 12t^2 + 6t$. Найдите закон движения точки, если в момент $t = 1$ с ее скорость $v = 8$ м/с, а путь $S = 6$ м.

283. Точка движется прямолинейно с ускорением $a = -6t + 18$. В момент времени $t = 0$ (начало отсчета) начальная скорость $v_0 = 24$ м/с, расстояние от начала отсчета $S_0 = 15$ м. Найдите: 1) скорость и закон движения точки; 2) значения ускорения a, скорости v и пути S в момент $t = 2$ с; 3) максимальную скорость v_{max} и соответствующее время t_m, когда скорость является наибольшей.

ОТВЕТЫ

260. $y = x^4 - x^2 + 3x + C$. **261.** $y = x^2 + 6x + C$. **262.** $y = x^2 - 5x + 4$. **263.** $y = x^3 - 2x^2 + 5x$. **264.** $y = 3e^x + x^2 + 5$. **265.** $3\sin x - \cos x + 3$. **266.** $y = \sin x - e^x + x^2 + 4$. **267.** $y = -\frac{3}{2}x^2 + C$. **268.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$. **269.** $y = \frac{C}{x}$. **270.** $x^2 - y^2 = C$. **271.** $x^2 + y^2 = C$. **272.** $y = \frac{1}{6}x^2$. **273.** $y = x^3 - x^2 + 4$. **274.** $y = x^3 + 4$. **275.** $y = e^{x+1}$. **276.** $S = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 2t + C$. **277.** $S = 2t^2 - t^3 + C$. **278.** $S = t^2 - 3t + 6$. **279.** $S = t^3 + 2t^2 - t$. **280.** $S = 2\sin t + 3$. **281.** $S = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$. **282.** $S = t^4 + t^3 + t + 3$. **283.** 1) $v = -3t^2 + 18t + 24$, $S = -t^3 + 9t^2 + 24t + 15$; 2) $a(2) = 6$ м/с, $v(2) = 48$ м/с, $S(2) = 91$ м; 3) $v_{\max} = 51$ м/с, $t_m = 3$ с.

§ 38. Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки)

Вычислите [284—288].

284. 1) $\int (7 - 2x)^3\,dx$; 2) $\int (5t - 1)^1\,dt$;

3) $\int \frac{dx}{(4 - 3x)^2}$; 4) $\int \frac{dz}{(5z + 1)^3}$;

5) $\int \frac{dx}{(3x + 1)^2}$.

285. 1) $\int \sqrt[3]{(3x + 1)^2}\,dx$; 2) $\int \sqrt{2x - 1}\,dx$;

3) $\int \sqrt[3]{(4 - 3t)^2}\,dt$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x - 1)^3}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x - 5)^2}}$.

286. 1) $\int (x^2 + 3)^5 x\,dx$; 2) $\int 4(x^4 - 1)x^3\,dx$;

3) $\int \frac{6z^2\,dz}{(1-2z^3)^4}$; 4) $\int \frac{x^3\,dx}{(5x^4+3)^5}$;

5) $\int \sqrt{(x^4-1)^3}\,x^3\,dx$.

287. 1) $\int \sqrt{e^x+1}\,e^x\,dx$; 2) $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^{3x}+1}$;

3) $\int \sqrt{2\sin x-1}\,\cos x\,dx$; 4) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\sin x}}$;

5) $\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin x+1}$.

288. 1) $\int \sqrt{(3z^4+2)^3}\,z^3\,dz$; 2) $\int \sqrt[3]{(1-3x^2)^4}\,x\,dx$;

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 4) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(5x^4+2)^2}}$;

5) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$.

ОТВЕТЫ

284. 1) $-\frac{1}{8}(7-2x)^4+C$; 2) $\frac{1}{25}(5t-1)^5+C$; 3) $\frac{1}{3(4-3x)}+C$; 4) $-\frac{1}{10(5z+1)^2}+C$; 5) $-\frac{1}{3(3x+1)}+C$. **285.** 1) $\frac{1}{5}(3x+1)^{(5/3)}+C$; 2) $\frac{1}{3}(2x-1)^{(3/2)}+C$; 3) $-\frac{1}{5}(4-3t)^{(5/3)}+C$; 4) $-\frac{2}{3\sqrt{3x-1}}+C$; 5) $\sqrt[3]{3x-5}+C$. **286.** 1) $-\frac{1}{12}(x^2+3)^6+C$; 2) $\frac{1}{2}(x^4-1)^2+C$; 3) $\frac{1}{3(1-2z^3)^3}+C$; 4) $\frac{1}{80(5x^4+3)^4}+C$; 5) $\frac{1}{10}(x^4-1)^{(5/2)}+C$.

287. 1) $\frac{2}{3}(e^x+1)^{(3/2)}+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln(e^{3x}+1)+C$; 3) $\frac{1}{3}(2\sin x-1)^{(3/2)}+C$; 4) $-2\sqrt{1-\sin x}+C$; 5) $\frac{1}{2}\ln|2\sin x+1|+C$. **288.** 1) $\frac{1}{30}(3z^4+2)^{(5/2)}+C$; 2) $-\frac{1}{14}(1-3x^2)^{(7/3)}+C$; 3) $\sqrt{x^2+1}+C$; 4) $\frac{3}{20}\sqrt[3]{5x^4+2}+C$; 5) $-\frac{2}{3\sqrt{x^3-1}}+C$.

§ 39. Определенный интеграл и его непосредственное вычисление

Вычислите [289—293].

289. 1) $\int\limits_0^2 x^2\,dx$; 2) $\int\limits_1^2 x^3\,dx$;

3) $\int\limits_1^2 x^4\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\,dx$;

5) $\int\limits_{-1}^0 (x^3 + 2x)\,dx$.

290. 1) $\int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int\limits_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{x^2}$;

3) $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx$; 4) $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx$;

5) $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

291. 1) $\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$; 2) $\int\limits_1^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int\limits_1^3 e^{2x}\,dx$; 4) $\int\limits_0^1 e^{3x}\,dx$;

5) $\int\limits_3^6 \frac{dx}{x}$.

292. 1) $\int\limits_0^{\pi/3} \sin x\,dx$; 2) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx$;

3) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x)\,dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{4\,dx}{\cos^2 x}$;

5) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

293. 1) $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; 2) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$;

3) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$; 4) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$;

5) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}$.

289. 1) $\frac{8}{3}$; 2) 3,75; 3) 6,2; 4) 40; 5) −1,25. **290.** 1) 1,5; 2) 1; 3) $\frac{16}{3}$; 4) 18,6; 5) 7,5. **291.** 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{40}{3}$; 3) $\frac{e^2}{2}(e^4-1)$; 4) $\frac{1}{3}(e^3-1)$; 5) $\ln 2 \approx 0{,}6931$. **292.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 2; 4) 4; 5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **293.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{12}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{\pi}{18}$.

§ 40. Дифференциальные уравнения

Найдите общее решение уравнения [294—296].

294. 1) $x^2\,\mathrm{d}x = 3y^2\,\mathrm{d}y$; 2) $\sqrt{x}\,\mathrm{d}y = \sqrt{y}\,\mathrm{d}x$;

3) $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x}} = \frac{3\mathrm{d}x}{\sqrt{y}}$; 4) $(y+1)\,\mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{d}y$.

295. 1) $xy\,\mathrm{d}x = (1+x^2)\,\mathrm{d}y$;

2) $y^2\,\mathrm{d}x + (x-2)\,\mathrm{d}y = 0$;

3) $(x^2 - yx^2)\,\mathrm{d}y + (y^2 + xy^2)\,\mathrm{d}x = 0$;

4) $x^2\,\mathrm{d}y - (2xy + 3y)\,\mathrm{d}x = 0$.

296. 1) $(1+y^2)\,\mathrm{d}x - \sqrt{x}\,\mathrm{d}y = 0$;

2) $\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y - x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

Найдите частное решение уравнения с разделяющимися переменными, удовлетворяющее начальному условию [297—298].

297. 1) $y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$, $y = 4$ при $x = -2$;

2) $x\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x$, $y = 6$ при $x = 2$;

3) $\mathrm{d}s = (3t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t$, $s = 4$ при $t = 2$;

4) $\frac{\mathrm{d}y}{x^2} = \frac{\mathrm{d}x}{y^2}$, $y = 2$ при $x = 0$.

298. 1) $\frac{\mathrm{d}y}{x-1} = \frac{\mathrm{d}x}{y-2}$, $y = 4$ при $x = 0$;

2) $(1+y)\,\mathrm{d}x = (1-x)\,\mathrm{d}y$, $y = 3$ при $x = -2$;

3) $(1+x)y\,\mathrm{d}x + (1-y)x\,\mathrm{d}y = 0$, $y = 1$ при $x = 1$;

4) $y^2\,\mathrm{d}x = e^x\,\mathrm{d}y$, $y = 1$ при $x = 0$.

299. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку (1; 2), угловой коэффициент которой в любой точке касания составляет $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}$.

300. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку (2; 2), угловой коэффициент которой в любой точке касания составляет $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y}$.

Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка [301—302].

301. 1) $\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$; 2) $\frac{dy}{dx} = y + 1$; 3) $x\frac{dy}{dx} - x^2 + 2y = 0$.

302. 1) $\frac{dy}{dx} + xy = x$; 2) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$;

3) $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = \sin x$.

303. Найдите частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

1) $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x x^3$, $y = e$ при $x = 1$;

2) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$, $y = 1$ при $x = 2$.

ОТВЕТЫ

294. 1) $y^3 = \frac{x^3}{3} + C$; 2) $\sqrt{x} - \sqrt{y} = C$; 3) $y^{(3/2)} = 3x^{(3/2)} + C$; 4) $y + 1 = C(x - 1)$. **295.** 1) $y = C\sqrt{1 + x^2}$; 2) $x = Ce^{(1/y)} + 2$; 3) $\frac{x+y}{xy} + \ln\frac{y}{x} + C = 0$; 4) $y = Cx^2e^{-(3/x)}$. **296.** 1) $2\sqrt{x} - \operatorname{arctg} y = C$; 2) $\arcsin y = C - \sqrt{1 - x^2}$. **297.** 1) $y^2 = x^2 + 12$; 2) $y = 3x$; 3) $s = t^3 - t^2$; 4) $y^3 = x^3 + 8$. **298.** 1) $x^2 - y^2 + 4y - 2x = 0$; 2) $(1 - x)(1 + y) = 12$; 3) $y = \ln(xy) + x$; 4) $y = e^x$. **299.** $y = \frac{1}{2}\ln|x| + 2$. **300.** $y^2 = \frac{1}{2}x + 3$. **301.** 1) $y = -1{,}5 + Ce^{2x}$; 2) $y = Ce^x - 1$; 3) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$. **302.** 1) $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$; 2) $y = (x+1)^2(x+C)$; 3) $y = (x + C)\sin x$. **303.** 1) $y = x^3e^x$; 2) $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$.

Глава 6. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

§ 41. Элементы комбинаторики

304. Вычислите A_7^3; P_5; C_6^4.

305. Вычислите P_8; A_{13}^7; C_{21}^6.

306. Найдите число размещений из $n + 1$ элементов по $k - 1$.

307. Найдите число размещений из $m + n$ элементов по $m - n + 1$.

308*. Проверьте справедливость равенства:

1) $C_9^3 = C_9^6$; 2) $C_{12}^5 = C_{12}^7$;

3) $C_6^4 + C_6^3 = C_7^4$; 4) $C_{10}^6 + C_{10}^5 = C_{11}^6$.

309. Найдите число сочетаний из $n + 2$ элементов по $k - 1$ в каждом.

310. Найдите число сочетаний из $m - n$ элементов по $n + 1$ в каждом.

311. Сколькими способами можно рассадить за столом четырех человек?

312. Сколькими способами можно составить четырехцветные ленты из семи лент различных цветов?

313. Сколькими способами можно выбрать четырех лиц на четыре различные должности из девяти кандидатов?

314. Сколько необходимо взять предметов, чтобы число размещений из них по 4 было в 12 раз больше числа размещений по 2?

315. Сколькими способами можно выбрать 3 из 6 открыток?

316. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?

317. Решите уравнение:

1) $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$; 2) $30x = A_x^3$;

3) $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$; 4) $\frac{12}{7} C_{x+2}^{x-1} = A_x^3$.

318. Решите систему:

1) $\begin{cases} A_x^y = 9A_x^{y-1}, \\ 2C_x^y = 3C_x^{y-1}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 66. \end{cases}$

ОТВЕТЫ

304. 210; 120; 15. **305.** 40 320; 8 648 640; 54 264.
306. $(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot(n-k+3)$. **307.** $(m+n)\cdot(m+n-1)\cdot\ldots\cdot 2n$.
309. $\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n-k+4)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k+1)}$. **310.** $\frac{(m-n)\cdot(m-n-1)\cdot\ldots\cdot(m-2n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)}$.
311. 24. **312.** 840. **313.** 3024. **314.** 6. **315.** 20. **316.** 720. **317.** 1) 23; 2) 7; 3) 5; 4) 5. **318.** 1) (14; 6); 2) (12; 5).

§ 42. Элементы теории вероятностей

319. В ящике с деталями оказалось 300 деталей I сорта, 200 деталей II сорта и 50 деталей III сорта. Наудачу вынимают одну из деталей. Чему равна вероятность вынуть деталь I, II или III сорта?

320. В урне находятся 20 белых и 15 черных шаров. Наудачу вынимают один шар, который оказывается белым, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найдите вероятность того, что этот шар тоже окажется белым.

321. В урне находятся 7 белых и 5 черных шаров. Найдите вероятность того, что 1) наудачу вынутый шар окажется черным; 2) два наудачу вынутых шара окажутся черными.

322. Считая выпадение любой грани игральной кости одинаково вероятным, найдите вероятность выпадения грани с нечетным числом очков.

323. В ящике в случайном порядке положены 10 деталей, из которых 4 стандартных. Контролер берет наудачу 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окажется стандартной.

324. Вероятность попадания баскетболистом в кольцо равна 0,6. Баскетболист сделал серию из четырех бросков. Какова вероятность того, что при этом было ровно три попадания?

325. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо 4 и 5 одновременно.

326. Рабочий обслуживает два автомата, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый автомат не потребует внимания рабочего, равна 0,8, а для второго автомата эта вероятность равна 0,7. Найдите вероятность того, что в течение часа ни один из автоматов не потребует внимания рабочего.

327. В урне находятся 6 шаров, из которых 3 белых. Наудачу вынуты один за другим два шара. Вычислите вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

328. В урне находятся 10 белых и 6 черных шаров. Найдите вероятность того, что три наудачу вынутых один за другим шара окажутся черными.

329. В ящике сложены 16 деталей, изготовленных на первом участке, 24 на втором, 20 — на третьем. Вероятности P_1, P_2, P_3 того, что детали, изготовленные на соответствующих участках, имеют отличное качество, составляет $P_1 = 0{,}8$, $P_2 = 0{,}6$, $P_3 = 0{,}8$. Определите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

330. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,8. Найдите вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.

ОТВЕТЫ

319. 0,545; 0,364; 0,091. **320.** 0,559. **321.** 0,417; 0,152. **322.** 0,5. **323.** 0,833. **324.** 0,346. **325.** 0,4. **326.** 0,56. **327.** 0,2. **328.** 0,036. **329.** 0,72. **330.** 0,41.

ЧАСТЬ 2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ. ЭЛЕМЕНТЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Глава 7. Элементы аналитической геометрии на плоскости

§ 43. Прямая линия

331. Вычислите периметр треугольника, вершинами которого служат точки $A(6; 7)$, $B(3; 3)$, $C(1; -5)$.

332. Найдите точку, равноудаленную от точек $A(7; -1)$, $B(-2; 2)$ и $C(-1; -5)$.

333. Точка C делит отрезок AB в отношении $3 : 5$ (от A к B). Концами отрезка служат точки $A(2; 3)$, $B(10; 11)$. Найдите точку C.

334. Точка $C(3; 5)$ делит отрезок AB в отношении $AC : CB = 3 : 4$. Найдите начало отрезка — точку A, если его концом служит точка $B(-1; 1)$.

335. Отрезок задан точками $A(-5; -2)$ и $B(-1; 0)$. До какой точки C необходимо его продолжить, чтобы было справедливо соотношение $AB : BC = 2 : 5$?

336. Вычислите длину отрезка прямой $4x + 3y - 36 = 0$, заключенного между осями координат.

337. Преобразуйте уравнение прямой $2x + 3y - 6 = 0$ в уравнение в отрезках на осях.

338. Найдите длину отрезка прямой $\frac{x}{9} + \frac{y}{-12} = 1$, заключенного между осями координат.

339. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $A(-2; 3)$.

340. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью абсцисс угол, равный $\operatorname{arctg} 3$.

341. Диагональ прямоугольника, две стороны которого лежат на положительных направлениях осей координат, равна 20. Угловой коэффициент диагонали составляет $\frac{4}{3}$. Найдите вершины прямоугольника.

342. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(-5; -2)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = -12$.

343. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(2; 3)$ и образующей с осью абсцисс угол $45°$.

344. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; -1)$, $B(-2; -2)$.

345. Составьте уравнения сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(-3; -2)$, $B(1; 5)$, $C(8; -4)$.

346. Треугольник задан вершинами $A(-3; 4)$, $B(-4; -3)$, $C(8; 1)$. Составьте уравнение медианы AD.

347. Найдите угол наклона к оси абсцисс прямой, проходящей через точки $A(-3; -3)$ и $B(2; 1)$.

348. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(-4; -1)$ и пересекающей ось ординат в точке $(0; 3)$.

349. Найдите вершины треугольника, стороны которого заданы уравнениями $4x + 3y + 20 = 0$; $6x - 7y - 16 = 0$; $x - 5y + 5 = 0$.

350. Найдите внутренние углы треугольника, если его стороны заданы уравнениями $7x + 4y + 9 = 0$; $x - 8y + 27 = 0$ и $2x - y - 6 = 0$.

351. Найдите острый угол между двумя прямыми, если первая проходит через точки $A_1\ (4; 2)$, $B_1\ (1; -7)$, а вторая — через точки $A_2\ (-1; 3)$, $B_2\ (8; 6)$.

352. Найдите внутренние углы треугольника, если его вершинами служат точки $A(-6; -3)$, $B(6; 7)$, $C(2; -1)$.

353. Дан треугольник с вершинами $A(6; 8)$, $B(2; -4)$, $C(-6; 4)$. Найдите угол между стороной AB и медианой, проведенной из вершины A.

354. Найдите острый угол между двумя прямыми, проходящими через начало координат и через точки, которыми отрезок прямой $x + 3y - 9 = 0$, заключенный между осями координат, делится в отношении $1 : 3 : 2$ в направлении от точки его пересечения с осью абсцисс к точке пересечения с осью ординат.

355. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(-2; 5)$ и образующей с прямой $3x - y + 4 = 0$ угол, равный $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.

356. Две прямые, проходящие через начало координат, образуют между собой угол, равный $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. Отношение угловых коэффициентов этих прямых составляет $2 : 7$. Составьте уравнения этих прямых.

357. Треугольник задан вершинами $A(-6; -2)$, $B(4; 8)$, $C(2; -10)$. Составьте уравнение биссектрисы угла BAC.

358. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(-3; 2)$ параллельно прямой $5x - 3y + 21 = 0$.

359. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + y - 4 = 0$ и $x - y = 0$ параллельно прямой $x - 4y + 4 = 0$.

360. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; -3)$ и перпендикулярной прямой $5x - 2y + 10 = 0$.

361. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой, пересекающей ось абсцисс в точке $(2; 0)$ и ось ординат в точке $(0; -6)$.

362. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + 2y + 4 = 0$ и $3x - y - 9 = 0$ перпендикулярно прямой $x + y - 7 = 0$.

363. Прямая проходит через середину отрезка прямой $3x - 7y + 21 = 0$, заключенного между осями координат, перпендикулярно этому отрезку. Составьте уравнение прямой.

364. Составьте уравнения высот треугольника, вершинами которого служат точки $(-4; 2)$, $(6; 5)$, $(1; -4)$.

365. Составьте уравнения высот треугольника по уравнениям его сторон: $11x + 2y - 21 = 0$; $8x - 3y + 7 = 0$ и $3x + 5y + 21 = 0$.

366. Найдите расстояние от точки $M(-2; 4)$ до прямой $4x - 3y - 5 = 0$.

367. Найдите расстояние между двумя параллельными прямыми $4x + 3y + 33 = 0$ и $4x + 3y - 17 = 0$.

368. Даны уравнения сторон треугольника: $6x - 5y + 8 = 0$; $4x + y - 38 = 0$; $x - 3y - 3 = 0$. Составьте уравнения его медиан.

369. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (8; 5) и образующей с осью абсцисс угол, в два раза больший угла, образуемого прямой $x - 4y + 4 = 0$ с той же осью.

370. Треугольник задан вершинами $A(-5; -2)$, $B(7; 6)$, $C(5; -4)$. Найдите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины A; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) углы $\angle ABA$, $\angle ACB$; 5) центр тяжести треугольника (центр тяжести лежит в точке пересечения медиан).

371. Даны уравнения двух сторон ромба: $3x - 10y + 37 = 0$, $9x + 2y - 17 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x - 2y - 19 = 0$. Составьте уравнения двух других сторон ромба и второй его диагонали.

372. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $3x - 2y + 12 = 0$; $x - 3y + 11 = 0$ и точка пересечения его диагоналей (2; 2). Составьте уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

373. Две противоположные вершины квадрата находятся в точках $A(-1; 1)$ и $C(5; 3)$. Составьте уравнения сторон и диагоналей этого квадрата.

374. Составьте уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, если уравнение его гипотенузы $x - 2y - 3 = 0$, а вершиной прямого угла служит точка $C(1, 6)$.

375. Луч света, выйдя из точки $A(3; 10)$, отражается от прямой $2x + y - 6 = 0$ и после отражения проходит через точку $B(7; 2)$. Составьте уравнения падающего и отраженного лучей.

ОТВЕТЫ

331. $18 + 2\sqrt{17}$. **332.** (2; −1). **333.** (5; 6). **334.** $A(6; 8)$. **335.** $C(9; 5)$. **336.** 15. **337.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$. **338.** 15. **339.** $3x + 2y = 0$. **340.** $7x - y = 0$. **341.** (0; 0), (12; 0), (12; 16), (0; 16). **342.** $y + 2x + 12 = 0$. **343.** $x - y + 1 = 0$. **344.** $x - y = 0$. **345.** AB: $3x - 4y + 13 = 0$; BC: $9x + 7y - 44 = 0$;

AC: $2x + 11y + 28 = 0$. **346.** $x + y - 1 = 0$. **347.** arctg 0,8 ≈ 38°,7. **348.** $x - y + 3 = 0$. **349.** (−2; −4), (5; 2), (−5; 0). **350.** ≈ 67°,4; ≈ 56°,3; ≈ 56°,3. **351.** ≈ 53°,1. **352.** $\angle A$ ≈ 25°,8; $\angle B$ ≈ 23°,6; $\angle C$ ≈ 130°,6. **353.** arctg 0,5 ≈ 26°,6. **354.** arctg $\frac{27}{47}$ ≈ 29°,9. **355.** $2x - y + 9 = 0$. **356.** $y = 2x$ и $y = 7x$; $y = \frac{1}{7}x$ и $y = \frac{1}{2}x$. **357.** $y + 2 = 0$. **358.** $5x - 3y + 21 = 0$. **359.** $x - 4y + 6 = 0$. **360.** $2x + 5y + 7 = 0$. **361.** $x + 3y = 0$. **362.** $x - y - 5 = 0$. **363.** $7x + 3y + 20 = 0$. **364.** $10x + 3y + 2 = 0$; $5x + 9y + 2 = 0$; $5x - 6y = 0$. **365.** $2x - 11y - 29 = 0$; $5x - 3y + 10 = 0$; $3x + 8y + 39 = 0$. **366.** 5. **367.** 10. **368.** $8x - 11y + 2 = 0$; $5x - 2y - 15 = 0$; $2x + 7y - 32 = 0$. **369.** $8x - 15y + 11 = 0$. **370.** 1) $2x - 3y + 4 = 0$; 2) $3x - 11y - 7 = 0$; 3) $3x + 2y - 7 = 0$; 4) 45°, 90°; 5) $\left(\frac{7}{3}; 0\right)$. **371.** $9x + 2y - 113 = 0$; $3x - 10y - 59 = 0$; $2x + 3y - 14 = 0$. **372.** $x - 3y - 3 = 0$; $3x - 2y - 16 = 0$; $x + 4y - 10 = 0$; $5x - 8y + 6 = 0$. **373.** $2x - y + 3 = 0$; $2x - y - 7 = 0$; $x + 2y - 1 = 0$; $x + 2y - 11 = 0$; $3x + y - 8 = 0$; $x - 3y + 4 = 0$. **374.** $3x - y + 3 = 0$; $x + 3y - 19 = 0$. **375.** $3x - y + 1 = 0$; $x + 3y - 13 = 0$.

§ 44. Окружность

376. Составьте уравнение окружности с центром в точке (−1; 4), проходящей через точку (3; 5).

377. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ и прямой $4x + 3y - 19 = 0$.

378. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки (2; 8), (4; −6), (−12; −6).

379. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого лежат на прямых: $x - y + 4 = 0$, $3x + y - 16 = 0$, $x + 2y - 2 = 0$.

380. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки (8; 5), (−1; −4) и имеющей центр на оси абсцисс.

381. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки (− 8; 3) (2; −7), если центр ее лежит на прямой $x + 4y + 16 = 0$.

382. Найдите координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 13 = 0$.

383. Вычислите расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 80 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$.

384. Составьте уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$.

385. Дана окружность $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$. Составьте уравнение диаметра, перпендикулярного хорде $2x - 3y + 13 = 0$.

386. Составьте уравнение радиуса, проведенного в точку $(5; -6)$ окружности $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 19 = 0$.

387. Составьте уравнение общей хорды двух пересекающихся окружностей $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$, $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$.

388. Составьте уравнения касательной и нормали к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $(-3; 4)$.

ОТВЕТЫ

376. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 17$. **377.** $(1; 5)$, $(7; -3)$. **378.** $(x + 4)^2 + y^2 = 100$. **379.** $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$. **380.** $(x - 4)^2 + y^2 = 41$. **381.** $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 52$. **382.** $(-3; 5)$, $\sqrt{21}$. **383.** 10. **384.** $4x - 3y - 10 = 0$. **385.** $3x + 2y - 12 = 0$. **386.** $5x + 2y - 13 = 0$. **387.** $7x + y - 17 = 0$. **388.** $3x - 4y + 25 = 0$; $4x + 3y = 0$.

§ 45. Эллипс

389. Составьте уравнение эллипса:

1) с фокусами на оси OX, если $2a = 8$ и $2b = 6$;
2) с фокусами на оси OY, если $2a = 10$ и $2b = 4$.

390. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $(-5; 0)$ и $(5, 0)$, а фокусы в точках $(-3, 0)$, $(3; 0)$.

391. Для элипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ найдите координаты вершин и длины осей.

392. Найдите координаты фокусов эллипса $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ и расстояние между ними.

393. Вычислите эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

394. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси OX, если расстояние между фокусами равно 12, а эксцентриситет $e = 0{,}6$.

395. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси OX, если большая ось равна 10, а эксцентриситет $e = 0{,}6$.

396. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси OX, если он проходит через точки (6; 4) и (8; 3).

397. Составьте уравнение касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{24} = 1$ в точке (−3; −4).

ОТВЕТЫ

389. 1) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$. **390.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **391.** (−5; 0), (5; 0), (0; −3), (0; 3); $2a = 10$, $2b = 6$. **392.** (−3; 0) (3; 0); $2c = 6$. **393.** $e = \frac{4}{5}$. **394.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. **395.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **396.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. **397.** $2x + 3y + 18 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.

§ 46. Гипербола

398. Составьте уравнение гиперболы, если ее вершины находятся в точках (−3; 0), (3; 0), а фокусы — в точках $(-3\sqrt{5}; 0)$, $(3\sqrt{5}; 0)$.

399. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{22} = 1$. Найдите координаты ее фокусов и расстояние $2c$ между ними.

400. Найдите эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

401. Составьте уравнение асимптот гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

402. Составьте уравнение гиперболы, если координаты ее фокусов $(\pm 2\sqrt{2}; 0)$, а эксцентриситет $e = 2$.

403. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, если длина ее действительной оси равна 16 и гипербола проходит через точку (−10; −3).

404. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, если она проходит через точки $(-6; -\sqrt{7})$ и $(6\sqrt{2}; 4)$.

405. Составьте уравнение гиперболы по уравнениям ее асимптот $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ и координатам точки $(9; 3\sqrt{2})$, через которую она проходит.

406. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$.

407. Составьте уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Ox, если гипербола проходит через точку $(-5; 4)$.

408. Составьте уравнения касательной и нормали к гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ в точке $(-5; 6)$.

ОТВЕТЫ

398. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$. **399.** $(-6; 0)$, $(6; 0)$, $2c = 12$. **400.** $e = \frac{4}{3}$. **401.** $y = \pm\frac{3}{4}$. **402.** $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$. **403.** $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$. **404.** $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$. **405.** $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{9} = 1$. **406.** $(0; -4)$, $(0; 4)$, $(0, -5)$, $(0; 5)$, $e = \frac{5}{4}$; $y = \pm\frac{4}{3}x$. **407.** $x^2 - y^2 = 9$. **408.** $10x + 3y + 32 = 0$, $3x - 10y + 75 = 0$.

§ 47. Парабола с вершиной в начале координат

409. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директрисой служит прямая $x = -2$.

410. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус находится в точке $(5; 0)$.

411. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $(2; -3)$.

412. Составьте уравнение директрисы параболы $x^2 = 4y$.

413. По данному уравнению параболы вычислите координаты ее фокуса:

1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 14\,y$.

414. Найдите координаты фокуса параболы с вершиной в начале координат, если ее директриса задана уравнением: 1) $x = 2$; 2) $y = 4$.

415. Найдите точки пересечения парабол $y = x^2$ и $x = y^2$.

416. Составьте уравнения касательной и нормали к параболе $y^2 = 8x$ в точке $(2; -4)$.

ОТВЕТЫ

409. $y^2 = 8x$. **410.** $y^2 = 20x$. **411.** $x^2 = -\frac{4}{3}y$. **412.** $y = -1$. **413.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$; 2) $\left(0; \frac{7}{2}\right)$. **414.** 1) $(-2; 0)$; 2) $(0; -4)$. **415.** $(0; 0)$; $(1; 1)$. **416.** $x + y + 2 = 0$; $x - y - 6 = 0$.

§ 48. Парабола со смещенной вершиной

417. Составьте уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси Oy, если парабола проходит через точку $(-6; -8)$ и имеет вершину $(2; 4)$.

418. Составьте уравнение параболы с вершиной $(4; 6)$ и фокусом $(-2; 6)$.

419. Составьте уравнение параболы с вершиной $(1; -3)$ и директрисой $x = 5$.

420. Найдите координаты вершины параболы $x^2 - 6x - 6y - 21 = 0$.

421. Найдите координаты фокуса параболы $y^2 - 8y - 8x - 8 = 0$.

422. Составьте уравнение оси параболы $x^2 + 16x - 18y + 100 = 0$.

423. Составьте уравнение директрисы параболы $y^2 - 2y - 10x + 11 = 0$.

424. Составьте уравнение касательной и нормали к параболе $y = x^2 - 7x + 10$ в точке $x = 4$.

ОТВЕТЫ

417. $(x-2)^2 = -\frac{16}{3}(y-4)$. **418.** $(y-6)^2 = -24(x-4)$. **419.** $(y+3)^2 = -16(x-1)$. **420.** (3; –5). **421.** (–1; –4). **422.** $x = -8$. **423.** $x = -1{,}5$. **424.** $x - y - 6 = 0$, $x + y - 2 = 0$.

Глава 8. Элементы стереометрии

§ 49. Прямая и плоскость в пространстве

425. Концы отрезка длиной 50 см отстоят от плоскости на 30 см и 44 см. Вычислите проекцию этого отрезка на плоскость.

426. Отрезок длиной 15 см пересекает плоскость, концы его отстоят от плоскости на 3 см и 6 см. Вычислите проекцию этого отрезка на плоскость.

427. Найдите расстояние от вершины куба до плоскости противоположной грани, если длина его диагонали равна d.

428. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами, равными 15 и 20, проведен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 16. Вычислите расстояние от концов перпендикуляра до гипотенузы.

429. Стороны треугольника составляют 51, 30 и 27. Из вершины меньшего угла треугольника проведен к его плоскости перпендикуляр длиной 10. Вычислите расстояние от концов перпендикуляра до противоположной стороны треугольника.

430. Диагонали ромба равны 60 и 80. В точке пересечения диагоналей к плоскости ромба проведен перпендикуляр длиной 45. Вычислите расстояние от конца перпендикуляра до стороны ромба.

431. Точка M находится на расстоянии 11 см от каждой стороны равнобедренной трапеции с основаниями, равными 16 см и 30 см. Вычислите расстояние от точки M до плоскости трапеции.

432. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные под углом 45° к плоскости, а их проекции составляют между собой угол 120°. Вычислите расстояние между концами наклонных.

433*. В равнобедренном прямоугольном треугольнике один из катетов образует с плоскостью, в которой лежит другой катет, угол 45°. Докажите, что гипотенуза образует с этой плоскостью угол 30°.

434*. Наклонная AB образует с плоскостью α угол 45°, а прямая AC, лежащая в плоскости α, составляет угол 45° с проекцией наклонной AB. Докажите, что $\angle BAC = 60°$.

435. На грани двугранного угла, равного 60°, дана точка, удаленная от ребра на расстояние m. Найдите расстояние от этой точки до другой грани.

436. Внутри двугранного угла, равного 120°, дана точка M, удаленная от каждой из граней на расстояние m. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

437. Площадь плоского многоугольника равна 150 см^2. Вычислите площадь проекции этого многоугольника на плоскость, составляющую с плоскостью многоугольника угол, равный 60°.

438. Дан треугольник ABC со сторонами $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см. Через сторону BC проведена плоскость α под углом 30° к плоскости ΔABC. Вычислите площадь проекции этого треугольника на плоскость α.

439. Вычислите площадь плоского многоугольника, если площадь его проекции равна 20 см^2 и двугранный угол между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции равен 45°.

440*. Докажите, что если в трехгранном угле два плоских угла — прямые, то и противоположные им двугранные углы — прямые.

ОТВЕТЫ

425. 48 см. **426.** 12 см. **427.** $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **428.** 12, 20. **429.** 24, 26. **430.** 51 см. **431.** 1 см. **432.** $a\sqrt{3}$. **435.** $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. **436.** $\frac{2m\sqrt{3}}{3}$. **437.** 75 см^2. **438.** $42\sqrt{3}$ см^2. **439.** $20\sqrt{2}$ см^2.

§ 50. Призма и параллелепипед

441. Какое число граней b, вершин s, ребер c и боковых ребер C имеют треугольная, четырехугольная и шестиугольная призмы?

442. Сколько плоских p, двугранных d и трехгранных t углов имеют треугольная, четырехугольная, шестиугольная и n-угольная призмы?

443. Сколько диагоналей имеют треугольная, четырехугольная, шестиугольная и n-угольная призмы?

444. Сколько диагональных сечений можно провести через одно боковое ребро в треугольной, четырехугольной, шестиугольной и n-угольной призме?

445. В правильной шестиугольной призме сторона основания равна m, а боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы и площади диагональных сечений.

446. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 13, 20 и 21, а высота призмы равна 25. Вычислите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

447. Вычислите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда с измерениями 12, 16, 21.

448. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, каждое ребро которого равно a, а угол в основании равен $60°$.

449. Найдите зависимость между ребром куба a и диагональю d.

450. Найдите расстояние от вершины куба со стороной a до его диагонали.

451. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, если диагонали его граней соответственно равны 11, 19 и 20.

452. В прямом параллелепипеде диагонали образуют с плоскостью основания углы $45°$ и $60°$. Стороны основания равны 17 и 31. Найдите диагонали этого параллелепипеда.

453. Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проведенной через середины трех ребер, выходящих из одной вершины.

454. В треугольной наклонной призме расстояния между боковыми ребрами равны 20, 34 и 42. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противоположным ей боковым ребром.

ОТВЕТЫ

441. Треугольная: $b = 5$, $s = 6$, $c = 9$, $C = 3$; четырехугольная: $b = 6$, $s = 8$, $c = 12$, $C = 4$; шестиугольная: $b = 8$, $s = 12$, $c = 18$, $C = 6$. **442.** Треугольная: $p = 18$, $d = 9$, $t = 6$; четырехугольная: $p = 24$, $d = 12$, $t = 8$; шестиугольная: $p = 36$, $d = 18$, $t = 12$; n-угольная: $p = 6n$, $d = 3n$, $t = 2n$. **443.** 0; 4; 18; $n(n-3)$. **444.** 0; 1; 3; $n - 3$. **445.** $2m$; $m\sqrt{3}$; $m^2\sqrt{3}$; $2m^2$. **446.** 300. **447.** 29. **448.** $a\sqrt{2}$, $2a$. **449.** $a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$. **450.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **451.** 21. **452.** 50, $25\sqrt{6}$. **453.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **454.** 16.

§ 51. Площади поверхностей призмы и параллелепипеда

---

455. Площадь поверхности куба равна S. Найдите длину его ребра.

456. Найдите площадь поверхности куба: 1) по его диагонали d; 2) по площади Q его диагонального сечения.

457. Площади полных поверхностей двух кубов равны S и Q. В каком соотношении находятся ребра этих кубов?

458. Найдите площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, высота которого равна h, площадь основания S и площадь диагонального сечения Q.

459. В прямоугольном параллелепипеде измерения относятся как $3 : 6 : 22$, а его диагональ равна 23. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

460. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 см и 8 см, а площадь диагонального сечения — 180 см^2. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

461. В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро равно 12 см, площадь диагонального сечения равна 312 см^2, площадь основания — 240 см^2. Вычислите стороны его основания.

462. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 3 и 8 и образуют угол 60°. Бóльшая диагональ параллелепипеда равна 49. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

463. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с диагоналями 12 и 16, диагональ боковой грани равна 26. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

464. Диагонали прямого параллелепипеда образуют с плоскостью основания углы 30° и 45°, а стороны оснований равны 6 см и 8 см. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

465. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы составляет 13 см, площадь боковой поверхности — 180 см^2. Вычислите площадь основания призмы.

466. В правильной шестиугольной призме диагонали равны 17 и 15. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

467. В прямой треугольной призме стороны оснований относятся как 17 : 15 : 8, боковое ребро составляет 20 см. Площадь полной поверхности — 2080 см^2. Вычислите площадь ее боковой поверхности.

468. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, боковая сторона которой составляет 26 см, основания — 22 см, 42 см, площадь диагонального сечения — 400 см^2. Вычислите площадь полной поверхности призмы.

469. В прямой треугольной призме стороны основания 34, 50, 52. Площадь сечения, проведенного через боковое ребро и бóльшую высоту основания, равна 480. Вычислите площадь ее боковой поверхности.

470. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами составляют 10, 10, 12, боковое ребро — 15. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

455. $\sqrt{6S}/6$. **456.** 1) $2d^2$; 2) $3Q\sqrt{2}$. **457.** $\sqrt{S}/\sqrt{Q}$. **458.** $2\sqrt{Q^2+2Sh^2}$. **459.** 432. **460.** 600 см². **461.** 10 см, 24 см. **462.** 1056. **463.** 1152. **464.** $140\sqrt{2}$ см². **465.** $\frac{75\sqrt{3}}{8}$ см² или $54\sqrt{3}$ см². **466.** $48\sqrt{33}$. **467.** 1600 см². **468.** 2696 см². **469.** 1360. **470.** 480.

§ 52. Пирамида. Усеченная пирамида

471. По стороне основания a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

472. По стороне основания a и высоте h найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

473. По стороне основания a и высоте h найдите боковое ребро правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

474. В правильной шестиугольной пирамиде двугранный угол при стороне основания составляет 60°, сторона основания — a. Найдите высоту и апофему пирамиды.

475. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно m и образует с плоскостью основания угол α. Вычислите сторону основания пирамиды.

476. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Вычислите длину бокового ребра пирамиды.

477. В правильной четырехугольной пирамиде угол между высотой и боковым ребром составляет α, сторона основания пирамиды — a. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

478. В правильной треугольной пирамиде угол между высотой и боковым ребром составляет α, сторона основания пирамиды — a. Найдите высоту пирамиды.

479. По стороне основания a и боковому ребру m правильной треугольной пирамиды вычислите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды.

480. Найдите площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а ее боковое ребро образует с плоскостью основания угол α.

481. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 12 и 16, длины боковых ребер равны 26. Найдите высоту пирамиды.

482. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 20, 21 и 29. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания углы, равные 45°. Найдите высоту пирамиды.

483. Основанием пирамиды служит параллелограмм со сторонами 3 и 7 и одной из диагоналей, равной 6. Высота пирамиды, проходящая через точку пересечения диагоналей основания, равна 4. Найдите боковые ребра пирамиды.

484. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковые стороны равны 10 см. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием двугранные углы, каждый из которых равен 45°. Найдите высоту пирамиды.

485. Высота пирамиды разделена на четыре равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 см^2. Вычислите площади сечений.

486. Высота пирамиды h = 36 см, площадь основания S = 400 см^2. На каком расстоянии от основания находится сечение с площадью 100 см^2, параллельное основанию?

487. Найдите высоту правильной усеченной: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной пирамиды, если стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b, а боковое ребро равно c.

488. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны большего и меньшего оснований равны a и b, а боковое ребро образует с основанием угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

489. Стороны правильной четырехугольной усеченной пирамиды составляют 10 и 2, высота — 2. Найдите боковое ребро пирамиды.

490. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота составляет 36, апофема — 45, стороны оснований относятся как 1 : 4. Найдите эти стороны.

491. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 7, стороны оснований — 3 и 5. Найдите ее диагональ.

492. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны основания равны a и b ($a > b$), а боковое ребро образует с основанием угол 45°. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту основания.

ОТВЕТЫ

471. 1) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2 - a^2}$. **472.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + \frac{a^2}{3}}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$. **473.** 1) $\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{h^2 + a^2}$. **474.** $\frac{3a}{2}$; $a\sqrt{3}$. **475.** $m\sqrt{3}\cos\alpha$. **476.** $\frac{h\sqrt{1 + \cos^2\alpha}}{\sin\alpha}$. **477.** $\frac{a}{\sqrt{2}\sin\alpha}$. **478.** $\frac{a}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. **479.** $\frac{a\sqrt{3m^2 - a^2}}{4}$. **480.** $\frac{a^2}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$. **481.** 24. **482.** 6. **483.** 5,6. **484.** 3 см. **485.** 225 см^2, 100 см^2, 25 см^2. **486.** 18 см. **487.** 1) $\sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{3}}$; 2) $\sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{2}}$; 3) $\sqrt{c^2 - (a-b)^2}$. **488.** $\frac{\sqrt{6}(a-b)}{2}$. **489.** 6. **490.** 72, 18. **491.** 9. **492.** $\frac{a^2 - b^2}{4}$.

§ 53. Площади поверхностей пирамиды и усеченной пирамиды

493. По стороне основания a и высоте h найдите площадь полной поверхности правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

494. Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 9, а апофема — 18.

495. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна 240 см^2, а площадь полной поверхности — 384 см^2. Найдите сторону основания a и высоту h пирамиды.

496. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 30°. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

497. По стороне основания a найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой площадь диагонального сечения равновелика площади основания.

498. В правильной треугольной пирамиде апофема, равная 6 см, составляет с плоскостью основания угол 60°. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

499. Площади основания и диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равны S кв. ед. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

500. В правильной шестиугольной пирамиде апофема равна 15, высота — 12. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

501. Основание пирамиды — квадрат со стороной 16 см, а две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна 12 см.

502. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

503. Основание пирамиды — ромб с диагоналями, равными 6 м и 8 м. Высота составляет 1 м. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании равны.

504. По сторонам оснований a и b ($a > b$) и высоте h найдите площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

505. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 24 см и 8 см, а высота — 15 см. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

506. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде площади оснований равны 25 см^2 и 9 см^2, а боковое ребро образует с плоскостью нижнего основания угол 45°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

ОТВЕТЫ

493. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{12h^2 + a^2} + a)$; 2) $a(\sqrt{4h^2 + a^2} + a)$; 3) $3a(\sqrt{4h^2 + 3a^2} + a\sqrt{3})/2$. **494.** 1458. **495.** $a = 12$ см, $h = 8$ см. **496.** $a^2(\sqrt{7} + \sqrt{3})/4$. **497.** $3a^2$. **498.** $81\sqrt{3}$ дм^2. **499.** $3S$. **500.** $432\sqrt{3}$. **501.** 768 см^2. **502.** 18. **503.** 50 м^2. **504.** 1) $3(a+b)\sqrt{4h^2 + \frac{(a-b)^2}{3}}/4$; 2) $(a+b)\sqrt{4h^2 + (a-b)^2}$; 3) $3(a+b)\frac{\sqrt{4h^2 + 3(a-b)^2}}{2}$. **505.** 1728 см^2. **506.** $16\sqrt{3}$ см^2.

§ 54. Цилиндр

507. Радиус основания цилиндра $R = 3$ см, высота $h = 8$ см. Найдите длину диагонали осевого сечения и острый угол ее наклона к плоскости основания.

508. Диагональ осевого сечения цилиндра $a = 26$ см, высота $h = 24$ см. Вычислите площадь основания цилиндра.

509. Радиус основания цилиндра $R = 13$ см, его высота $h = 20$ см. Вычислите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 5 см от нее.

510. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 60°. Высота цилиндра равна 15 см, расстояние от секущей плоскости до оси цилиндра равно 3 см. Вычислите площадь сечения.

511. Диагональ осевого сечения цилиндра, имеющего квадрат в осевом сечении, равна a. Вычислите площадь полной поверхности вписанной в этот цилиндр шестиугольной призмы.

512. Около цилиндра радиуса r, осевое сечение которого квадрат, описана правильная треугольная призма. Найдите площадь ее боковой поверхности.

513. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 см, 8 см. Длина бокового ребра равна 10 см. Вычислите площади осевых сечений соответственно вписанного в призму и описанного около призмы цилиндров.

514. В правильной треугольной призме боковое ребро равно a; отрезок, соединяющий середину бокового ребра с центром основания, составляет с плоскостью основания угол α. Вычислите площадь осевого сечения вписанного в призму цилиндра.

ОТВЕТЫ

507. 10 см, arcsin(4/5). **508.** 25π см^2. **509.** 480 см^2. **510.** $30\sqrt{3}$ см^2. **511.** $[3a^2(4 + \sqrt{3})]/8$. **512.** $12r^2\sqrt{3}$. **513.** 40 см^2, 100 см^2. **514.** $\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha$.

§ 55. Площади боковой и полной поверхностей цилиндра

515. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

516. Образующая равностороннего цилиндра равна l. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

517. Площадь боковой поверхности цилиндра составляет половину площади его полной поверхности, диагональ осевого сечения — 5. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

518. В цилиндре через середину радиуса основания проведено сечение перпендикулярно радиусу. Сечение образует квадрат площадью 16 см^2. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

519. Площадь полной поверхности цилиндра составляет 1170π см^2, а радиус его основания — 15 см. На каком расстоянии от оси цилиндра проходит сечение, имеющее форму квадрата?

520. Квадрат со стороной a вращается вокруг внешней оси, параллельной его стороне и удаленной от квадрата на расстояние a. Найдите площадь полной поверхности полученной фигуры вращения.

ОТВЕТЫ

515. πS. **516.** πl^2. **517.** 20π. **518.** $\frac{32\pi\sqrt{3}}{3}$ см^2. **519.** 9 см. **520.** $12\pi a^2$.

521. Площадь осевого сечения конуса равна 48 см^2, его образующая составляет с плоскостью основания угол α. Вычислите площадь основания конуса.

522. Радиус основания конуса $R = 6$ см, его высота $h = 12$ см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси конуса на расстоянии 2 см от нее.

523. В конусе проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу, равную 120°. Высота конуса 12 см, расстояние от секущей плоскости до оси 3 см. Найдите площадь сечения.

524. Радиус основания конуса равен R. Найдите площадь сечения, параллельного основанию, делящего высоту конуса в отношении $m : n$ (от вершины к основанию).

525. В равностороннем конусе (в осевом сечении — правильный треугольник) радиус основания равен R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°.

526. Высота конуса равна H, угол между высотой и образующей — 30°. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°.

527. Через вершину конуса с высотой, равной H, под углом 60° к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая дугу, равную 90°. Найдите площадь сечения.

528. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания a, двугранный угол при основании α. Найдите площадь осевого сечения вписанного конуса.

529. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей и высотой конуса.

530. Сектор, радиус которого равен L, а угол равен α, свернут в коническую поверхность. Найдите радиус основания конуса.

531. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r ($R > r$), образующая наклонена к основанию под углом α. Найдите высоту конуса.

532. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r ($R > r$), высота равна H. Найдите образующую.

533. Радиусы оснований усеченного конуса составляют 18 см и 30 см, образующая составляет 20 см. Найдите расстояние от центра меньшего основания до окружности большего.

534. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r; образующая равна l. Найдите площадь осевого сечения.

535. Площади оснований усеченного конуса составляют 32 см^2 и 2 см^2. Высота разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найдите площади сечений.

536. Радиусы оснований усеченного конуса составляют 10 см и 6 см. Высота разделена на четыре равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найдите площади сечений.

ОТВЕТЫ

521. $\frac{48\pi}{\operatorname{tg}\alpha}$. **522.** $32\sqrt{2}$ см^2. **523.** $18\sqrt{3}$ см^2. **524.** $\pi R^2 m^2/(m+n)^2$.

525. $R^2\sqrt{3}$. **526.** $\frac{1}{3}H^2$. **527.** $\frac{2}{3}H^2$. **528.** $(a^2\operatorname{tg}\alpha)/12$. **529.** 30°. **530.** $L\alpha/360°$.

531. $(R-r)\operatorname{tg}\alpha$. **532.** $\sqrt{H^2+(R-z)^2}$. **533.** 34 см.

534. $(R+r)\sqrt{l^2+(R-z)^2}$. **535.** 18 см^2, 8 см^2. **536.** 49π см^2, 64π см^2, 81π см^2.

§ 57. Площади боковой и полной поверхностей конуса и усеченного конуса

537. Площадь основания конуса составляет $S_о$, а площадь его осевого сечения — $S_с$. Вычислите площадь его боковой поверхности.

538. Площадь осевого сечения равностороннего конуса равна Q. Найдите площадь его полной поверхности.

539. Прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 см и 4 см, вращается вокруг оси, параллельной гипотенузе и проходящей через вершину прямого угла. Вычислите площадь поверхности фигуры вращения.

540. В равносторонний конус вписан равносторонний цилиндр. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если площадь боковой поверхности цилиндра равна S.

541. Треугольник со сторонами, равными 8 см и 5 см, и углом между ними, составляющим 60°, вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно меньшей стороне. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

542. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r ($R > r$), а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

543. Около шара радиуса r описан усеченный конус, в котором образующая составляет с основанием угол α. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

544. Найдите высоту усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равновелика сумме площадей оснований, а радиусы оснований равны R и r.

545. Вокруг сферы радиуса 6 см описан усеченный конус, радиусы оснований которого относятся как 4 : 9. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

546. В усеченный конус вписана сфера радиуса r. Из центра сферы диаметр большего основания виден под углом α. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

ОТВЕТЫ

537. $\sqrt{S_о^2 + \pi^2 S_с^2}$. **538.** $Q\pi\sqrt{3}$. **539.** 40,8 π см^2. **540.** $S(4\sqrt{3} + 7)/6$. **541.** 120 π см^2. **542.** $2\pi(R^2 - r^2)$. **543.** $4\pi r^2/\sin^2\alpha$. **544.** $2Rr/(R + r)$. **545.** 169 π см^2. **546.** $4\pi r^2/\sin^2\alpha$.

§ 58. Сфера и шар. Вписанная и описанная сферы. Площади поверхностей сферы и ее частей

547. Сфера проходит через точку (−3; 4; −2), а ее центр находится в начале координат. Составьте уравнение сферы.

548. Найдите кратчайшее расстояние от точки (6; −3; −2) до сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

549. Найдите центр и радиус R сферы $x^2 - 6x + y^2 + 8y + z^2 - 4z + 4 = 0$.

550. Точка (4; −2; 3) лежит на сфере с центром (2; −3; −1). Составьте уравнение сферы.

551. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 4, 6 и 12. Найдите радиус описанной сферы.

552. Ребро куба равно a. Найдите радиусы вписанного в куб и описанного около него шаров.

553. Высота правильной шестиугольной призмы составляет 8 см, а диагональ боковой грани — 13 см. Найдите радиус описанного шара.

554. В правильной четырехугольной пирамиде высота составляет h, а боковое ребро — b. Найдите радиус описанной сферы.

555. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой составляет с основанием угол α. Найдите длину бокового ребра.

556. Вокруг сферы описан усеченный конус, радиусы оснований которого составляют R и r. Найдите радиус сферы.

557. Найдите отношение площадей поверхностей двух сфер, из которых одна вписана, а другая описана относительно равностороннего цилиндра.

558. Найдите отношение площадей поверхностей двух сфер, из которых одна вписана, а другая описана относительно равностороннего конуса.

559. Найдите отношение площадей поверхностей двух сфер, из которых одна вписана, а вторая описана относительно правильного тетраэдра (правильного четырехгранника).

560. Радиусы оснований сферического пояса составляют 10 см и 12 см, его высота — 1 см. Найдите площадь поверхности сферического пояса.

561. Найдите площадь полной поверхности шарового сектора, если дуга осевого сечения сектора содержит 120°, а радиус шара равен R.

562. Площадь поверхности шарового сегмента вместе с площадью его основания равна S. Найдите высоту сегмента, если радиус шара равен R.

563. Круговой сегмент с дугой 120° и площадью Q вращается вокруг своей высоты. Найдите площадь полной поверхности полученной фигуры.

ОТВЕТЫ

547. $x^2 + y^2 + z^2 = 29$. **548.** 4. **549.** (3; –4; 2), $R = 5$. **550.** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 21$. **551.** 7. **552.** $R_в = a/2$, $R_о = a\sqrt{3}/2$. **553.** 11 см. **554.** $b^2/2h$. **555.** $2R\sin\alpha$. **556.** $\sqrt{Rr}$. **557.** 2 : 1. **558.** 4 : 1. **559.** 9 : 1. **560.** 275π см². **561.** $\frac{1}{2}\pi R^2(\sqrt{3} + 2)$. **562.** $2R + \sqrt{4R^2 - \frac{S}{\pi}}$. **563.** $21\pi Q/(4\pi - 3\sqrt{3})$.

§ 59. Объемы призмы и параллелепипеда

564. Найдите объем куба: 1) по его диагонали d; 2) по площади его поверхности S.

565. Найдите объем куба, если площадь его диагонального сечения равна S.

566. Найдите ребро куба, объем которого равен сумме объемов кубов с ребрами m и n.

567. Измерения прямоугольного параллелепипеда составляют 6, 16 и 18. Найдите ребро равновеликого ему куба.

568. Площади граней прямоугольного параллелепипеда равны S_1, S_2 и S_3. Найдите его объем.

569. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 2 : 7 : 26; диагональ параллелепипеда составляет 81 см. Найдите объем параллелепипеда.

570. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда составляют 7, 8 и 9. Найдите объем параллелепипеда.

571. Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм со сторонами 8 и 32 и острым углом $\alpha = 60°$. Бóльшая диагональ параллелепипеда равна 40. Найдите объем параллелепипеда.

572. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 17 и 25, одна из диагоналей основания — 26. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.

573. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 25 см и 39 см, площади его диагональных сечений — 204 см^2 и 336 см^2. Найдите объем параллелепипеда.

574. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, диагонали которого относятся как 5 : 16. Диагонали параллелепипеда равны 26 см и 40 см. Найдите объем параллелепипеда.

575. Сторона основания правильной призмы равна a, боковое ребро равно b. Найдите объем призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

576. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, площадь боковой поверхности равновелика сумме площадей оснований. Найдите объем призмы.

577. В основании прямой призмы лежит трапеция, площадь которой составляет 306 см^2. Отношение суммы боковых сторон трапеции к сумме ее параллельных сторон равно 4 : 1, а их разность равна 42. Площади параллельных боковых граней равны 40 см^2 и 30 см^2, а площади двух других боковых граней — 75 см^2 и 205 см^2. Найдите объем призмы.

578. Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами, равными 4 см и 6 см, боковое ребро равно 2 см и образует с каждой из смежных сторон основания угол, составляющий 60°. Найдите объем параллелепипеда.

ОТВЕТЫ

564. 1) $\frac{1}{9} d^3 \sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{36} S \sqrt{6S}$. **565.** $\frac{1}{2} S \sqrt[4]{2S^2}$. **566.** $\sqrt[3]{m^3 + n^3}$. **567.** 12. **568.** $\sqrt{S_1 S_2 S_3}$. **569.** 9828 см^3. **570.** $48\sqrt{11}$. **571.** $2048\sqrt{3}$. **572.** $3536\sqrt{3}$. **573.** 5040 см^3. **574.** 3840 см^3. **575.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2b$. **576.** $\frac{1}{8} a^3$. **577.** 1530 см^3. **578.** $24\sqrt{2}$ см^3.

§ 60. Объем пирамиды. Объем усеченной пирамиды

579. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

580. Апофема правильной треугольной пирамиды составляет k, а высота — h. Найдите объем пирамиды.

581. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды и площадь ее боковой поверхности равны соответственно S и Q. Найдите объем пирамиды.

582. Найдите объем правильного тетраэдра (треугольной пирамиды) с ребром a.

583. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом $30°$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найдите объем пирамиды.

584. Основание пирамиды — ромб со стороной 15 см, каждая грань пирамиды наклонена к основанию под углом $45°$. Найдите объем пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна 300 см^2.

585. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны составляют 3 см и 5 см, а боковая сторона — 7 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, а большее боковое ребро равно 10 см. Найдите объем пирамиды.

586. Основание пирамиды — прямоугольник, площадь которого равна 1 м^2. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углами $30°$ и $60°$. Найдите объем пирамиды.

587. По боковому ребру l и сторонам основания a и b найдите объем правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

588. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды составляют 4 и 8, диагональ — 11. Найдите объем пирамиды.

589. Апофема правильной шестиугольной усеченной пирамиды $a = 10$ см, высота $h = 8$ см. Сумма длин каждой из сторон верхнего и нижнего ее оснований $l_в + l_н = 8\sqrt{3}$ см. Найдите объем пирамиды.

590. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости большего основания под углом α, стороны оснований равны a и b $(a > b)$. Найдите объем пирамиды.

591. Стороны одного основания усеченной пирамиды равны 27, 29 и 52, периметр другого основания равен 72; высота пирамиды — 10. Найдите объем пирамиды.

ОТВЕТЫ

579. 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2 - a^2)}$.

580. $\sqrt{3}\,h(k^2 - h^2)$. **581.** $\frac{1}{6}\sqrt{S(Q^2 - S^2)}$. **582.** $\frac{\sqrt{2}}{12}Q^3$. **583.** $\frac{\sqrt{3}}{18}a^3$.

584. 500 см³. **585.** 80 см³. **586.** $\frac{1}{3}$ м³.

587. 1) $\frac{1}{12}(a^2 + ab + b^2)\sqrt{3l^2 - (a - b)^2}$;

2) $\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(a - b)^2}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + ab + b^2)\sqrt{l^2 - (a - b)^2}$. **588.** $\frac{784}{3}$. **589.** $624\sqrt{3}$ см³.

590. $\frac{1}{12}(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha$. **591.** 1900.

§ 61. Объемы фигур вращения

592. Площадь осевого сечения равностороннего цилиндра равна S. Найдите объем цилиндра.

593. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор с радиусом R и центральным углом, равным α радиан. Найдите объем конуса.

594. В прямоугольной трапеции основания равны a и b ($b > a$). Найдите отношение объемов V_a и V_b фигур, образованных вращением трапеции вокруг оснований.

595. Радиусы оснований усеченного конуса составляют R и r ($R > r$), образующая наклонена к основанию под углом α. Найдите объем усеченного конуса.

596. В усеченном конусе радиусы оснований составляют 27 см и 11 см. Образующая относится к высоте как 17 : 15. Найдите объем усеченного конуса.

597. Усеченный конус с радиусами оснований 6 см и 9 см и высотой 12 см пересечен двумя плоскостями, параллельными основаниям, которые делят высоту на три равные части. Найдите объем средней части конуса.

598. Основания равнобедренной трапеции составляют 11 см и 21 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите объем фигуры, образуемой при вращении этой трапеции вокруг ее оси.

599. Диаметры трех шаров составляют 6 см, 8 см и 10 см. Найдите диаметр шара, объем которого равен сумме объемов этих шаров.

600. Найдите отношение объемов вписанного в куб и описанного около куба шаров.

601. Найдите отношение объемов цилиндра, шара и конуса, если диаметры оснований цилиндра, конуса и их высоты равны диаметру шара.

602. Внешний радиус полого шара составляет 9 см, толщина стенок — 3 см. Вычислите объем, заключенный между стенками.

603. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит диаметр на две части, равные 3 см и 9 см. Найдите объемы соответствующих частей шара.

604. Радиус основания шарового сегмента составляет 8 см, дуга осевого сечения — 60°. Вычислите объем сегмента.

605. Радиус основания шарового сегмента составляет 8, его высота 4. Найдите объем сегмента.

606. Радиус шара равен R, угол в осевом сечении шарового сектора — 120°. Найдите объем шарового сектора.

607. Радиус окружности основания шарового сектора составляет 60 см, радиус шара — 75 см. Вычислите объем шарового сектора.

608. В шаре, радиус которого составляет 65 см, проведены по одну сторону от центра две параллельные плоскости, отстоящие от центра на 19 см и 25 см. Вычислите объем части шара, заключенной между ними.

ОТВЕТЫ

592. $\frac{1}{4}\pi S\sqrt{S}$. **593.** $\frac{\alpha^2 R^3\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}{24\pi^2}$. **594.** $V_a/V_b = \frac{a+2b}{2a+b}$. **595.** $\frac{1}{3}\pi \operatorname{tg}\alpha(R^3 - r^3)$. **596.** 11 470 π см³. **597.** $\frac{676}{3}\pi$ см³. **598.** 793 π см³. **599.** 12 см. **600.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. **601.** 3 : 2 : 1. **602.** 2149 см³. **603.** 45 π см³, 243 π см³. **604.** $512(16-9\sqrt{3})\frac{\pi}{3}$ см³. **605.** $\frac{416}{3}\pi$. **606.** $\frac{1}{3}\pi R^3$. **607.** 112 500 π см³. **608.** 22 428 π см³.

§ 62. Вычисление объемов фигур вращения с помощью определенного интеграла

Найдите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси Ox площади, ограниченной заданными линиями **[609—612]**.

609. 1) $y^2 = x$,	$y = 0$,	$x = 1$,	$x = 2$;
2) $y^2 = 2x$,	$y = 0$,	$x = 2$,	$x = 4$;
3) $y^2 = 6x$,	$y = 0$,	$x = 1$,	$x = 3$;
4) $y^2 = 2(x + 2)$,	$y = 0$,	$x = 0$.	
610. 1) $y = x^2 - 1$,	$y = 0$;		
2) $y = 3x - x^2$,	$y = 0$;		
3) $y = -x^2 - x$,	$y = 0$;		
4) $y = -\frac{x}{2} + 2$,	$y = 0$,	$x = 0$.	
611. 1) $y = \sin x$,	$x = 0$,	$x = \pi$,	$y = 0$;
2) $y = \cos x$,	$y = 0$,	$x = 0$,	$x = \frac{\pi}{2}$.
612. 1) $y^2 = 9x$,	$y = 3x$;		
2) $y^2 = 4(x + 2)$,	$x - y + 2 = 0$;		
3) $y^2 = 4(x - 2)$,	$y = 0$,	$x = 3$,	$x = 6$;
4) $y = -x^2 + 5x$,	$y = 0$,	$x = 0$,	$x = 3$.

ОТВЕТЫ

609. 1) $1{,}5\pi$; 2) 12π; 3) 24π; 4) 4π. **610.** 1) $\frac{16}{15}\pi$; 2) $8{,}1\pi$; 3) $\frac{\pi}{30}$; 4) $\frac{16\pi}{3}$.

611. 1) $\frac{\pi^2}{2}$; 2) $\frac{\pi^2}{4}$. **612.** 1) $1{,}5\pi$; 2) $\frac{32\pi}{3}$; 3) 30π; 4) $71{,}1\pi$.

ЧАСТЬ 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

Глава 9. Дополнительные упражнения и задачи по алгебре

§ 63. Линейные уравнения с одной переменной и системы линейных уравнений

Решите уравнение, приводимое к линейному [613, 614].

613. 1) $\frac{3x+4}{7} - \frac{5x+12}{3} + \frac{3(3x+10)}{4} = \frac{9x+44}{5}$;

2) $\frac{3x+2}{18} - \frac{3(2x+1)}{36} = \frac{5x-8}{24} - \frac{x-1}{6} - \frac{2}{9}$;

3) $\frac{16x-3}{20} + \frac{x+10}{3} - \frac{7x-6}{4} - \frac{x-3}{2} = \frac{3(x-3)}{10}$;

4) $\frac{26x-51}{52} - \frac{2(1-3x)}{13} = x - \frac{20x-(10-3x)}{156}$;

5) $\frac{a-x}{b-a} - \frac{x+a}{a-b} = \frac{2ax}{a^2-b^2}$;

6) $\frac{a-x}{2b} + \frac{b(a-x)}{3} + \frac{bx}{a} = b$;

7) $\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} - \frac{x+b}{a+b} - \frac{2(x-b)}{a-b} = 0$;

8) $\frac{x+a}{a+b} + \frac{x-a}{b-a} - \frac{2x}{b} = \frac{1}{a+b} - \frac{x-a}{b^2-a^2}$;

9) $\frac{b(x-b)}{2a+b} + \frac{a(x-a)}{a+2b} = a+b$;

10) $\frac{a^2+x}{b^2-x} - \frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2} = \frac{a^2-x}{b^2+x}$.

614. 1) $\frac{2-6x}{3-x} - \frac{3x+4}{x-3} = 3$;

2) $\frac{2x}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} - \frac{5}{2-2x} = \frac{7}{2}$;

3) $\frac{6}{x+1}+\frac{1}{2-2x}+\frac{x+1}{2-2x^2}=\frac{2x-1}{x^2-1}$;

4) $\frac{x+1}{x^2-2x+1}+\frac{2x-7}{2x^2-4x+2}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{3-3x}$;

5) $\frac{x-4}{x+4}+\frac{16x}{x^2-16}=\frac{x+4}{x-4}$;

6) $\frac{5x+2}{2x-3}-\frac{9{,}5}{2x-3}=\frac{7}{2}$;

7) $\frac{x+2}{x-8}+\frac{x-2}{x-8}=10$;

8) $\frac{5x-3}{x^2+3x}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x}=\frac{x+1}{3x^2+9x}$.

615. Решите задачу на составление уравнений.

1) Разность двух чисел 35. При делении большего числа на меньшее в частном получили 4 и в остатке 2. Найдите эти числа.

2) Одно из двух искомых чисел меньше другого на 6. Если разделить большее число на 2, то частное будет тремя единицами меньше другого числа. Найдите эти числа.

3) Знаменатель дроби на 4 больше числителя. При увеличении числителя и знаменателя дроби на 5 дробь обращается в 2/3. Найдите эту дробь.

4) В двузначном числе цифра десятков вдвое больше цифры единиц. Если цифры этого числа переставить, то получится число, меньшее искомого на 36. Найдите это число.

5) Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если цифры этого числа переставить, то получится число, меньшее искомого на 18. Найдите это число.

6) В двузначном числе цифра десятков на 3 больше цифры единиц. Если к этому числу прибавить его обращенное число, то получится 143. Найдите это число.

7) Разделите 850 на две части так, чтобы 8% первой части в сумме с 24% второй части составляли 12% всего числа.

8) Участок площадью в 864 га разделили на три поля так, что площадь третьего поля стала равной сумме площадей первых двух полей, причем отношение площадей второго и первого полей стало равным 11/5. Вычислите площадь каждого поля.

9) В равнобедренном треугольнике основание составляет 3/4 боковой стороны, а периметр треугольника равен 22 см. Найдите его стороны.

10) Окружность переднего колеса повозки 1,5 м, заднего 2 м. На каком расстоянии переднее колесо сделает на 50 оборотов более заднего?

11) Площадь кольца равна 76,36 м^2, ширина кольца l равна 2 м. Вычислите радиусы внутренней и внешней окружностей. Площадь круга $S = \pi R^2$, $\pi \approx 3,14$.

12) Кусок проволоки разрезали на две части в отношении 5 : 3, причем первая часть оказалась на 5 м длиннее 5/9 длины всей проволоки. Вычислите длины частей проволоки.

616. Решите систему уравнений способом алгебраического сложения:

1) $\begin{cases} 3x + 5y = 14, \\ 2x - 4y = -20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{2(2x - y)}{3} - \dfrac{3x - 2}{2} = 2x + 2y, \\ 5x - 4y = -18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{4} - \dfrac{x - 2y}{2} = \dfrac{7 - 2y}{3} - x + 1, \\ 3x - 2y = 8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1 - 2y}{10} - y = \dfrac{x}{10} + 2, \\ 2(1 - y) = 1 + x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{3x - 5y}{3} - \dfrac{x + 2y}{6} = -12, \\ 7x - 10y = -60; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{7 + x}{5} - \dfrac{2x - y}{4} = 3y - 5, \\ \dfrac{5y - 7}{6} + \dfrac{4x - 3}{2} = 20 - 5x; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{c} = b + d, \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{d} = a + c; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x - a}{b} + \dfrac{y - b}{a} = 1, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1. \end{cases}$

617. Решите систему уравнений по формулам Крамера:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 5x + 6y = -7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 11, \\ 4x - 5y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 6y = 13, \\ 7x + 18y = -1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{5} + \dfrac{5x - 3y}{3} = x + 1, \\ \dfrac{2x - 3y}{3} + \dfrac{4x - 3y}{2} = y + 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{2x - y + 3}{3} - \dfrac{x - 2y + 3}{4} = 4, \\ \dfrac{3x - 4y + 3}{4} + \dfrac{4x - 2y - 9}{3} = 4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 7 + \dfrac{x - 3y}{4} = 2x - \dfrac{y + 5}{3}, \\ \dfrac{10(x - y) - 4(1 - x)}{3} = y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$

618. Решите систему уравнений с применением метода Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ 3x - y + 5z = 2, \\ x - 2y + 4z = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1, \\ 3x - y + 2z = 1, \\ 4x - y + 5z = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = -11, \\ 3x + 2y - z = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + 3y + 2z - 1 = 0, \\ 2x - 5y - 3z - 16 = 0, \\ 3x + 2y + 4z - 4 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + 2y - z = -3, \\ 2x - y + 3z = 21, \\ x + y - z = -5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} -x + 2y + z = 7, \\ 3x - y + 6z = 19, \\ -4x + 3y - z = 8. \end{cases}$

619. Решите уравнение с модулем:

1) $|x - 3| = 2$;
2) $|2x - 5| = x - 1$;
3) $\left|\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right| = x - 1$;
4) $|2x - 5| = 2 - x$.

ОТВЕТЫ

613. 1) -6; 2) 10; 3) 5; 4) 11; 5) $\frac{a^2}{b-a}$; 6) a; 7) $3b$; 8) b; 9) $2(a + b)$; 10) $\frac{a+b}{a-b}$. **614.** 1) Нет решения; 2) 2; 3) 2; 4) 2,5; 5) x — любое число, кроме $x = \pm 4$; 6) нет решения; 7) 10; 8) -1. **615.** 1) 46; 11; 2) 12; 18; 3) $\frac{3}{7}$; 4) 84; 5) 75; 6) 85; 7) 637,5; 212,5; 8) 135 га, 297 га, 432 га; 9) 8 см, 8 см, 6 см; 10) 300 м; 11) 5 м и 7 м; 12) 45 м, 27 м. **616.** 1) $(-2; 4)$; 2) $(-2; 2)$; 3) $(3; 0,5)$; 4) $(5; -2)$; 5) $(0; -6)$; 6) $(3; 2)$; 7) $(ab; cd)$; 8) $\left(\frac{a^2}{a-b}; \frac{b^2}{b-a}\right)$. **617.** 1) $(1; -2)$; 2) $(7; 5)$; 3) $(5; -2)$; 4) $(3; 2)$; 5) $(7; 5)$; 6) $(4; 4)$; 7) $(2; 3; 4)$; 8) $(2; -1; 1)$. **618.** 1) $(-1; 0; 1)$; 2) $(2; 1; -2)$; 3) $(4; -1; 3)$; 4) $(2; -3; 1)$; 5) $(2; -2; 5)$; 6) $(-4; -1; 5)$. **619.** 1) 1; 5; 2) 2; 4; 3) $\frac{3}{2}$; 4) решения нет.

§ 64. Линейные неравенства и системы линейных неравенств

620. Решите неравенство:

1) $2(3 + 5x) < 3(7x - 4) - 4$;

2) $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3$;

3) $\frac{5-x}{8} + \frac{3-2x}{4} \geqslant 0$;

4) $(2x + 1)^2 - 8 \geqslant (3 - 2x)^2$;

5) $8x^2 + (x + 1)^2 > (2 - 3x)^2 + 4$;

6) $(x - 1)^2 - 2x + 10 < (2 - x)^2$;

7) $5 - \frac{x}{3} < 3\frac{1}{2} - \frac{4x+1}{8}$;

8) $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}$.

621. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5(x+1)+6(x+2)>9(x+3), \\ 7x-3(2x+3)>2(x-18); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{7-x}{2}-3<\dfrac{3+4x}{5}-4, \\ \dfrac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2-\dfrac{5+x}{7}<1-\dfrac{9-x}{14}, \\ 12-\dfrac{1}{3}\left(47-\dfrac{60}{x}\right)>3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}>4-\dfrac{7-3x}{5}, \\ 7(3x-6)+4(17-x)>11-5(x-3); \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{3-2x}{4}\geqslant\dfrac{5-2x}{8}, \\ \dfrac{4x-15}{3}>-4\dfrac{2}{3}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{5-x}{8}+\dfrac{3-2x}{4}>0, \\ \dfrac{3x-5}{2}-\dfrac{2x-1}{3}<-2. \end{cases}$

622. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2(4-x)}{1-3x}>0;$ 2) $\dfrac{2-y}{y-4}\geqslant 0;$ 3) $\dfrac{5-a}{a-4}\leqslant 0;$

4) $\dfrac{x-3}{4-x}<0;$ 5) $\dfrac{4-2x}{1+3x}>0;$ 6) $\dfrac{3a+7}{2-6a}>0;$

7) $\dfrac{5m-3}{5-2m}<-3;$ 8) $\dfrac{3x+1}{2x-5}>2.$

ОТВЕТЫ

620. 1) $2<x<+\infty$; 2) $0{,}96<x<+\infty$; 3) $-\infty<x\leqslant 2{,}2$; 4) $1\leqslant x<+\infty$; 5) $0{,}5<x<+\infty$; 6) нет решения; 7) $\frac{39}{20}<x<+\infty$; 8) $-\infty<x<2{,}25$.
621. 1) $5<x<27$; 2) $9<x<+\infty$; 3) нет решения; 4) $0<x<+\infty$; 5) $\frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}$; 6) $-\infty<x<0{,}2$. **622.** 1) $-\infty<x<\frac{1}{3}$ или $4<x<+\infty$; 2) $2\leqslant y<4$; 3) $-\infty<a<4$ или $5\leqslant a<+\infty$;
4) $-\infty<x<3$ или $4<x<+\infty$; 5) $-\frac{1}{3}<x<2$; 6) $-2\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3}$;
7) $2{,}5<m<12$; 8) $2{,}5<x<11$.

§ 65. Решение неравенств методом промежутков (интервалов). Решение неравенств с модулем

623. Решите неравенство:

1) $(x+3)(x-2)(x-5)<0$;
2) $(x-3)(x-5)(x^2+2x+5)\leqslant 0$;
3) $(x+2)(x-4)(x-5)<0$;
4) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$;
5) $(x+4)(x-1)(x-5)\leqslant 0$;
6) $\dfrac{(x-5)(x-3)(x+2)}{(x-4)(x+4)}\leqslant 0$;
7) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$;
8) $\dfrac{(x-3)^2(x-2)(x+1)}{(x-4)(x+3)}\leqslant 0$.

624. Решите неравенство с модулем:

1) $|x-2|>1$;
2) $|x-2|<1$;
3) $2|x+1|>x+4$;
4) $3|x-1|\leqslant x+3$;
5) $|x-1|+|x-2|>3+x$;
6) $x^2-|5x-3|-x<2$.

ОТВЕТЫ

623. 1) $-\infty<x<-3,\ 2<x<5$; 2) $3\leqslant x\leqslant 5$; 3) $-\infty<x<-2,\ 4<x<5$; 4) $1<x<2,\ 3<x<+\infty$; 5) $-\infty<x\leqslant -4,\ 1\leqslant x\leqslant 5$; 6) $-\infty<x<-4, 2\leqslant x\leqslant 3,\ 4<x\leqslant 5$; 7) $-\infty<x<1,\ \frac{3}{2}<x<2,\ 3<x<+\infty$; 8) $-3<x\leqslant -1,\ 2\leqslant x<4$. **624.** 1) $-\infty<x<1,\ 3<x<+\infty$; 2) $1<x<3$; 3) $-\infty<x<-2,\ 2<x<+\infty$; 4) $0\leqslant x\leqslant 3$; 5) $-\infty<x<0,\ 6<x<+\infty$; 6) $-5<x<3+2\sqrt{2}$.

§ 66. Квадратные уравнения. Уравнения, приводимые к квадратным

625. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+1}{2x+6}-\dfrac{2x}{3-x}-\dfrac{9(x+5)}{2(x^2-9)}=0$;

2) $\dfrac{x^2-2x-9}{x^3-8}+\dfrac{x+6}{x^2+2x+4}=\dfrac{1}{x-2}$;

3) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^3+1}=0;$

4) $\frac{3x^2-11}{8}+\frac{74-2x^2}{12}=10;$

5) $\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}-\frac{x+6}{x-1}+\frac{x+36}{x^3-1}=0;$

6) $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=3;$

7) $\frac{7}{x+1}+\frac{x+4}{2x-2}=\frac{3x^2-38}{x^2-1};$

8) $\frac{y^2+5y+3}{y^2+y+2}=\frac{3}{2};$

9) $\frac{3}{2x+1}+\frac{6}{4x^2-1}-\frac{2}{2x-1}=2;$

10) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-2}{x+1}=\frac{4x^2}{x^2-1};$

11) $\frac{x(x-7)}{3}+\frac{x-4}{3}-\frac{11x}{10}=1;$

12) $\frac{x(2x-3)}{2}+\frac{(3x-1)^2}{5}-\frac{(x+3)^2}{5}=1;$

13) $\frac{18z+7}{z^3-1}+\frac{30}{1-z^2}+\frac{13}{z^2+z+1}=0;$

14) $\frac{1}{2(1-y)}+\frac{5}{4y^2+4y+4}=\frac{3y}{y^3-1}.$

626. Сократите дробь:

1) $\frac{2x^2+7x+6}{12+5x-2x^2};$ 2) $\frac{21x^2+11x-2}{15x^2+16x+4};$

3) $\frac{4x^2+5x-6}{4x^2-15x+9};$ 4) $\frac{5x^2-13x+6}{5x^2-8x+3}.$

627. Решите уравнение, приводимое к квадратному:

1) $9x^4-37x^2+4=0;$
2) $4x^4-7x^2+3=0;$
3) $x^4-6x^3+3x^2+26x-24=0;$
4) $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0;$
5) $2x^3-7x^2+2x+3=0;$
6) $x^3-2x^2-5x-6=0;$
7) $x^4-16=0;$
8) $27x^3-8=0.$

Решите задачу на составление квадратного уравнения [628, 629].

628. 1) Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 552. Найдите эти числа.

2) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6 и в остатке 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 5 и в остатке 2. Найдите это число.

3) Среднее арифметическое двух чисел равно 20, а среднее геометрическое 12. Найдите эти числа.

4) На какое число надо разделить 136, чтобы в частном получить на 3 меньше делителя, а в остатке на 7 меньше делителя?

5) В двузначном числе цифра единиц на два больше цифры его десятков, а произведение этого числа на сумму его цифр равно 144. Найдите это число.

6) Даны три числа: 100, 60 и 30. Какое число нужно отнять от первого и прибавить его к третьему, чтобы второе число оказалось средним пропорциональным между вновь полученными числами?

7) Числитель некоторой дроби на 11 больше знаменателя. Если к числителю дроби прибавить 5, а к знаменателю 12, то полученная дробь будет втрое меньше исходной. Найдите эту дробь.

8) При перемножении двух чисел, из которых одно на 14 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив на 4 цифру десятков в произведении. При делении полученного им произведения на меньший сомножитель он получил в частном 77 и в остатке 24. Найдите сомножители.

629. 1) Периметр прямоугольника равен 28 см, а сумма площадей квадратов, построенных на смежных сторонах прямоугольника, равна 116 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

2) Периметр прямоугольника равен 46 см, а его диагональ равна 17 см. Найдите стороны прямоугольника.

3) В прямоугольном треугольнике один катет больше другого на 31 см, а его площадь равна 180 см^2. Найдите катеты этого треугольника.

4) Периметр прямоугольного треугольника равен 48 см, а его площадь равна 96 см^2. Найдите стороны треугольника.

5) В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше одного катета на 9 см и больше другого на 18 см. Вычислите стороны этого треугольника.

6) Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен 9,6 м; разность отрезков гипотенузы равна 5,6 м. Найдите длину гипотенузы.

7) Окружность заднего колеса повозки в два раза больше окружности переднего; если окружность заднего колеса уменьшить на 2 дм, а переднего увеличить на 4 дм, то на расстоянии 120 м заднее колесо сделало бы на 20 оборотов меньше переднего. Найдите длины окружностей обоих колес.

8) По окружности длиной 30 м движутся два тела. Одно из них проходит в секунду на 4 м больше, чем второе, и заканчивает оборот на две секунды раньше. Найдите скорости движения обоих тел.

9) Из листа жести, имеющего форму прямоугольника, приготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам ее вырезано по квадрату со стороной в 5 см и получившиеся края загнуты. Вычислите размеры листа жести, если длина его вдвое больше ширины и если объем коробки оказался равным 1500 см^3.

10) От нити, равной периметру некоторого квадрата, отрезано с одного конца 36 см. Укороченная таким образом нить представляет собой периметр другого квадрата, площадь которого в 2,25 раза меньше площади первого. Найдите первоначальную длину нити.

ОТВЕТЫ

625. 1) $-3{,}2$; 2) -5; 5; 3) -5; 5; 4) ± 5; 5) $-\frac{7}{9}$; 2; 6) нет решения; 7) $-\frac{11}{5}$; 6; 8) 0; 7; 9) $\frac{3}{4}$; 10) 0; $\frac{3}{2}$; 11) $-0{,}7$; 10; 12) $-0{,}5$; 2; 13) -4; 9; 14) $-3{,}5$; -1.

626. 1) $\frac{x+2}{4-x}$; 2) $\frac{7x-1}{5x+2}$; 3) $\frac{x+2}{x-3}$; 4) $\frac{x-2}{x-1}$. **627.** 1) $\pm\frac{1}{3}$; ± 2; 2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; ± 1; 3) -2; 1; 3; 4; 4) -4; -2; 1; 3; 5) $-\frac{1}{2}$; 1; 3; 6) -2; 1; 3; 7) -2; 2; 8) $\frac{2}{3}$.

628. 1) 23 и 24; 2) 32; 3) 36 и 4; 4) 13; 5) 24; 6) 60 или 10; 7) $\frac{15}{4}$; 8) 64 и 78. **629.** 1) 10 см; 4 см; 2) 15 см; 8 см; 3) 40 см; 9 см; 4) 12 см; 16 см; 20 см; 5) 27 см; 36 см; 45 см; 6) 20 м; 7) 16 дм и 32 дм или 11 дм и 22 дм; 8) 10 м/с и 6 м/с; 9) 40 см и 20 см; 10) 108 см.

630. Решите иррациональное уравнение:

1) $\sqrt{x} = x - 2$;
2) $\sqrt{x+2} = x - 4$;
3) $\sqrt{x^2+9} = 2x - 3$;
4) $\sqrt{x^2-9} = 3x - 11$;
5) $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x - 1$;
6) $\sqrt{x^2-9} = x^2 - 21$;
7) $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$;
8) $\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$;
9) $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{2x+2} = x + 1$;
10) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+19}$;
11) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{5x+4}$;
12) $\sqrt{3x+3} + \sqrt{4x-4} = \sqrt{6x+13}$;
13) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x-3} = \sqrt{2x-7}$;
14) $5\sqrt{2x+3} - \sqrt{18x-5} = \dfrac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}}$.

631. Решите иррациональное неравенство:

1) $\sqrt{x^2-x-12} < x$;
2) $\sqrt{2x+5} < 2x - 1$;
3) $\sqrt{x+3} > x + 1$;
4) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} > 2$;
5) $\sqrt{x^2-5x+6} > x + 2$;
6) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$;
7) $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$;
8) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$;
9) $\sqrt{x+2} < \sqrt{x+12} - \sqrt{2x-10}$;
10) $\sqrt{x} - \sqrt{6x+1} < \sqrt{2x+1}$.

ОТВЕТЫ

630. 1) 4; 2) 7; 3) 4; 4) 5; 5) 3; 6) −5; 5; 7) −2; 2; 8) 17/16; 9) 7; 10) 2; 11) 1; 12) 2; 13) 4; 14) 3. **631.** 1) $4 \leqslant x < +\infty$; 2) $2 < x < +\infty$; 3) $-3 \leqslant x < 1$; 4) $6 < x \leqslant 10$; 5) $-\infty < x < 2/9$; 6) $4 \leqslant x < 5$, $6 < x \leqslant 7$; 7) $0 \leqslant x \leqslant 5$; 8) $1 \leqslant x < 3/2$; 9) $5 \leqslant x < 6$; 10) $0 \leqslant x < +\infty$.

632. Решите систему:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + x + 7y = 50; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+5} + \dfrac{2}{y-3} = 2, \\ \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{1}{y-6}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x^2 - 4xy = 36, \\ x^2 - 2y^2 = -14; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^{3/2} - y^{3/2} = 7, \\ x + x^{1/2}y^{1/2} + y = 7; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ x - y = 16; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}xy, \\ x - y = \dfrac{1}{4}xy; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 9, \\ \dfrac{(x+y)x}{y} = 20; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 3, \\ x - y = 6; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9xy, \\ x + y = 6; \end{cases}$

13) $\begin{cases} (x + y)(x - 2y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 50; \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 37, \\ x - y = 1; \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

Решите задачу на составление системы двух уравнений с двумя переменными [**633**, **634**].

633. 1) Разложите число 195 на два множителя, разность которых равна 2.

2) Разность квадратов двух чисел равна 200. Если каждое из чисел уменьшить на 1, то разность их квадратов будет равна 180. Найдите эти числа.

3) Если к произведению двух чисел прибавить меньшее из них, то получим 54, если прибавить большее из них, то получим 56. Найдите эти числа.

4) Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получим обращенное число. Найдите это число.

5) Произведение двух целых положительных чисел в три раза больше их суммы, а сумма их квадратов равна 160. Найдите эти числа.

6) Разность кубов двух чисел равна 657, а разность их оснований равна 3. Найдите эти числа.

7) Сумма некоторой дроби с обратной ей равна $\frac{25}{12}$, а сумма квадратов ее числителя и знаменателя равна 25. Найдите эту дробь.

8) Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 34; произведение искомого числа на обращенное равно 1855. Найдите это число.

9) Сумма цифр трехзначного числа равна 11; сумма квадратов этих цифр равна 45. Если из искомого числа вычесть 198, то получится число обращенное. Найдите это число.

10) Частное от деления трехзначного числа на сумму его цифр равно 48; частное от деления произведения этих цифр на их сумму равно $10\frac{2}{3}$, а цифра десятков есть среднее арифметическое двух других его цифр. Найдите это трехзначное число.

634. 1) Отношение сторон прямоугольника равно 6. Сумма площадей квадратов, построенных на этих сторонах, равна 592 см^2. Вычислите стороны прямоугольника.

2) Высота трапеции равна 18 см. Площадь трапеции равновелика площади прямоугольника, стороны которого равны длинам верхнего и нижнего оснований трапеции, а утроенное верхнее основание, сложенное с нижним, в четыре раза больше высоты трапеции. Вычислите основания трапеции.

3) Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь равна 24 см^2. Найдите стороны треугольника.

4) Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета на 1 см, сумма же гипотенузы с этим катетом в пять раз больше другого катета. Вычислите стороны этого треугольника.

5) Периметр прямоугольного треугольника равен 208 см, сумма катетов на 30 см больше гипотенузы. Вычислите стороны треугольника.

6) Сумма диагоналей ромба на 6 см меньше его периметра. Площадь ромба равна 24 см^2. Вычислите сторону ромба и длины его диагоналей.

7) Сумма площадей двух кругов, касающихся внешним образом, равна 90π см^2, а расстояние между их центрами равно 12 см. Вычислите диаметры кругов.

8) На расстоянии 27 м заднее колесо повозки делает на 5 оборотов меньше переднего. Если бы длину окружности заднего колеса увеличить на 3 дм, то на том же расстоянии заднее колесо сделало бы на 6 оборотов меньше переднего. Найдите длины окружностей обоих колес.

ОТВЕТЫ

632. 1) (3; 4), (4; 3); 2) (3; 4), (4; 3), (−3; −4), (−4; −3); 3) (−3; −2), (−3; 2), (3; −2), (3; 2); 4) (4; 3), (−3; 4); 5) $\left(-7\frac{1}{2};\ 3\frac{5}{8}\right)$, (−2; 5); 6) (−2; 3), (2; −3), (−18; −13), (18; 13); 7) (4; 1); 8) (25; 9); 9) (0; 0), (−2; −4), (4; 2); 10) (4; 1), $\left(\frac{10}{3};\ \frac{2}{3}\right)$; 11) (8; 2); 12) (4; 2), (2; 4); 13) (−5; 5), (5; −5), $(-2\sqrt{10};\ -\sqrt{10})$, $(2\sqrt{10};\ \sqrt{10})$; 14) (−3; −4), (4; 3); 15) (2; −3), (−2; 3), (−3; −2), (3; 2); 16) $(3\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, $(3\sqrt{2};\ \sqrt{2})$. **633.** 1) 13 и 15 или −15 и −13; 2) 15, 5; 3) 6 и 8 или −9 и −7; 4) 24; 5) 12 и 4; 6) 10 и 7 или −7 и −10; 7) $\frac{3}{4}$ или $\frac{4}{3}$; 8) 35 или 53; 9) 452; 10) 864. **634.** 1) 24 см и 4 см; 2) 36 см и 12 см; 3) 6 см, 8 см и 10 см; 4) 5 см, 12 см, 13 см; 5) 80 см, 39 см, 89 см; 6) 5 см, 6 см, 8 см; 7) 18 см и 6 см; 8) 18 дм и 27 дм.

§ 69. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Решите показательное уравнение [**635**, **636**].

635. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$;	2) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x = 128$;

3) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$;	4) $2^{2x} \cdot 3^x = 144$;

5) $\sqrt{9^{x(x-1)-1/2}} = \sqrt[4]{3}$;	6) $5^{x+1} + 5^x = 750$;

7) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$;	8) $6^{2x+3} = 3^{3x} \cdot 2^{x+6}$;

9) $16\sqrt{(0{,}25)^{5 - x/4}} = 2^{\sqrt{x+1}}$;

10) $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$;

11) $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0{,}5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$.

636. 1) $3^{2x} - 3^x = 702$;
2) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$;

3) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$;
4) $4(9^x - 4^x) = 13(6^x - 4^x)$;

5) $3 \cdot 4^x + 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$;
6) $2^{2x+4} + 15 \cdot 2^x - 1 = 0$;

7) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{8}{15}$;
8) $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$;

9) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x - 1/2 + 2/x} = 5\sqrt{5}$;
10) $4^{x-1} - 17 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0$;

11) $2^{2x+2} + 3 \cdot 2^x - 1 = 0$.

637. Решите систему показательных уравнений:

1) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = y^x, \\ x^3 = y^2; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2^{2x} - 3^y = 55, \\ 2^x - 3^{y/2} = 5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 9\sqrt[x]{100} = \frac{9}{10}, \\ 25^y \cdot \sqrt[x]{10\,000} = \frac{5}{4}; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 3^y \cdot 2^{6/x} = 36, \\ 5^y \cdot 2^{9/x} = 200; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3^x - 4^y = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7. \end{cases}$

638. Решите показательное неравенство:

1) $5^{x-1} < \sqrt{5}$;
2) $3^{x^2-4} > 1$;

3) $7^{3x} < 7^{(2/5)x^2}$;
4) $2^{-x^2+3x} < 4$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > \frac{1}{4}$;
6) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$;

7) $2^{x-1} + 2^{x-3} > 17$;
8) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geqslant 448$;

9) $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leqslant 624$;
10) $3 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x - 24 > 0$;

11) $(x^2 - 8x + 16)^{x-6} < 1$;
12) $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$.

Решите логарифмическое уравнение [639, 640].

639. 1) $\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3$;

2) $\lg x+\lg(x-2)=\lg(12-x)$;

3) $\lg(x-5)-\lg\sqrt{5x-19}=0$;

4) $2x(1-\lg 5)=\lg(4^x+2x-6)$;

5) $\lg\left(3x+\frac{13}{4}\right)-\lg x=\lg(x-3)$;

6) $\frac{\lg(2x+4)}{\lg(4x-7)}=2$;

7) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$;

8) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$;

9) $\log_{\sqrt{6}}(x-1)+\log_{\sqrt{6}}(x+4)=\log_{\sqrt{6}}6$;

10) $\lg\frac{x+9}{x+1}=\lg 3$;

11) $\log_2(1-x)=3-\log_2(3-x)$;

12) $\log_5(x^2-4)-\log_5(x-2)=0$.

640. 1) $\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x=2\log_4(2x-1)$;

2) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$;

3) $\log_3(x^3+1)-\log_3(x+1)=1$;

4) $2\log_5 3+4\log_{25}7=\log_5 x$;

5) $\log_3\log_8\log_2(x+9)=\log_3 2-1$;

6) $\log_2\log_3\log_4(x^2+3x+54)=0$;

7) $\lg\left(2x-\frac{9}{4}\right)-\lg x=\lg(x-3)$;

8) $\log_x\log_2\log_x 8=0$;

9) $\lg\sqrt{5x+10}+\lg\sqrt{2x+3}=\lg 15$;

10) $\lg^2 x-\lg x^2=\lg^2 3-1$;

11) $\log_5(x-1)\log_5\sqrt{x}=\log_5 5$;

12) $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$;

13) $\log_4(x+2)-\log_4(x-2)=2-\log_4 8$.

641. Решите систему логарифмических уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=22, \\ \lg x-\lg y=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=29, \\ \lg x+\lg y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2(x-y)=5-\log_2(x+y), \\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3^y\cdot 9^x=81, \\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_y x-3\log_x y=2, \\ \log_2 x=4-\log_2 y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy=40, \\ x^{\lg y}=4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_x \log_2 \log_x y=0, \\ \log_y 9=1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x+2y=100, \\ \lg x-\lg y=\lg 1{,}6. \end{cases}$

642. Решите логарифмическое неравенство:

1) $\log_2(x-4)<1$;

2) $\lg(3x-4)<\lg(2x+1)$;

3) $\log_5 \dfrac{3x-2}{x+1}>0$;

4) $\log_8(x^2-4x+3)<1$;

5) $\log_3(x^2+2x)>1$;

6) $\log_{1/2}(x^2-5x-6)\geqslant -3$;

7) $\log_{15}(x-3)+\log_{15}(x-5)<1$;

8) $\log_{1/6}(10-x)+\log_{1/6}(x-3)\geqslant -1$;

9) $\log_3(8x^2+x)>2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

10) $\log_2(x-3)\leqslant 1-\log_2(x-2)$;

11) $\log_{3x-3} x>1$;

12) $\log_{0,3}(3x-8)>\log_{0,3}(x^2+4)$.

ОТВЕТЫ

635. 1) 3; 2) $2\frac{1}{3}$; 3) 35; 4) 2; 5) 1,5, −0,5; 6) 3; 7) 0; 8) 3; 9) 24; 10) 1; 11) нет решения. **636.** 1) 3; 2) −2; 3) 0; 1/4; 4) 2; 5) 1; 6) −4; 7) 2; 8) −2; 2; 9) −1; 2; 10) −1; 3; 11) −2. **637.** 1) (2; 1); 2) (2; 1); 3) (1; 1), $\left(\frac{5}{3};\ \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$; 4) (3; 2); 5) (−2; 1,5); 6) (3; 2); 7) (4; 1).

638. 1) $-\infty < x < \frac{3}{2}$; 2) $-\infty < x < -2$, $2 < x < +\infty$; 3) $-\infty < x < 0$, $\frac{15}{2} < x < +\infty$; 4) $-\infty < x < 1$, $2 < x < +\infty$; 5) $-\infty < x < 1$; 6) $-\infty < x < 1$; 7) $1 < x < +\infty$; 8) $\frac{9}{2} \leqslant x < +\infty$; 9) $-\infty < x \leqslant 1$; 10) $2 < x < +\infty$; 11) $-\infty < x < 3$, $5 < x < 6$; 12) $2 < x < 3$, $4 < x < +\infty$. **639.** 1) 37; 2) 4; 3) 11; 4) 3; 5) $6\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5}{2}$; 7) 6; 8) 3; 9) 2; 10) 3; 11) -1; 12) решения нет.

640. 1) 1; 16; 2) решения нет; 3) 2; 4) 441; 5) 7; 6) -5, 2; 7) $4\frac{1}{2}$; 8) $2\sqrt{2}$; 9) 3; 10) $\frac{10}{3}$, 30; 11) $\frac{1}{5}$, 25; 12) 6; 13) 16. **641.** 1) (20; 2); 2) (25; 4), (4; 25); 3) (6; 2); 4) (1; 2); 5) (8; 2); 6) (10; 4), (4; 10); 7) (3; 9); 8) (16; 10). **642.** 1) $4 < x < 6$; 2) $\frac{4}{3} < x < 5$; 3) решения нет; 4) $-1 < x < 1$, $3 < x < 5$; 5) $-\infty < x < -3$, $1 < x < +\infty$; 6) $-2 \leqslant x < -1$, $6 < x \leqslant 7$; 7) $5 < x < 8$; 8) $4 \leqslant x \leqslant 9$; 9) $0 < x < 1$; 10) $3 < x \leqslant 4$; 11) $\frac{4}{3} < x < \frac{3}{2}$ при $3x - 3 > 1$; решения нет при $0 < 3x - 3 < 1$; 12) $\frac{8}{3} < x < +\infty$.

Глава 10. Тригонометрические функции. Дополнительные упражнения

§ 70. Тригонометрические тождества

Докажите тригонометрическое тождество [643, 644].

643. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - 1)$;

3) $2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\alpha$;

4) $2(\cos^6\alpha + \sin^6\alpha) - 3(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) = -1$;

5) $(1 + 2\sin\alpha\cos\alpha)(\operatorname{tg}\alpha - 1) = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\operatorname{tg}\alpha + 1)$;

6) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$;

7) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

8) $\dfrac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos\alpha}{1 - \sin\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

9) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$

10) $\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{1}{\cos\alpha} = 0;$

11) $\operatorname{tg}^2\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha) - (1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2 = 4\operatorname{tg}^2\alpha;$

12) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = 1;$

13) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1;$

14) $\left(1+\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = \dfrac{4}{\sin^2\alpha};$

15) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha};$

16) $1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha;$

17) $\dfrac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha\cdot(\sin\alpha-1)} = 2;$

18) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 1;$

19) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha};$

20) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha = (1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha);$

21) $(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 2(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha);$

22) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1};$

23) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta = 1;$

24) $(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1)^3 + 27\sin^6\alpha\cdot\cos^6\alpha = 0;$

25) $\dfrac{\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{2\sin^2\alpha-1} = 1-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha.$

644. 1) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin(3\pi/2-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\pi/2-\alpha)}{\sin(\pi/2+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(3\pi/2+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)} = -\cos\alpha;$

2) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin(3\pi/2-\alpha)} - \dfrac{\operatorname{tg}(3\pi/2+\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)} + \operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\cos 0 = 0;$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi/2+\alpha)\cdot\cos(3\pi/2-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cdot\sin(3\pi/2+\alpha)} = \sin\alpha;$

4) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin^2(3\pi/2+\alpha)} + \dfrac{\operatorname{tg}^2(3\pi/2+\alpha)}{\operatorname{ctg}^2(\pi+\alpha)} = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha-2\pi)}.$

§ 71. Теоремы сложения. Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов

Докажите тождество **[645—647]**.

645. 1) $\dfrac{\sin(\pi/4 + \alpha) - \cos(\pi/4 + \alpha)}{\sin(\pi/4 + \alpha) + \cos(\pi/4 + \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha;$

2) $\dfrac{\sin(\pi/6 - \alpha) + \sin(\pi/6 + \alpha)}{\sin(\pi/6 - \alpha) - \sin(\pi/6 + \alpha)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg}\alpha;$

3) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \cos\alpha \cdot \cos\beta;$

4) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta;$

5) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta;$

6) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 1;$

7) $\sin 5\alpha \cdot \cos 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \sin 3\alpha = \sin 2\alpha;$

8) $\sin(\alpha - 2\pi) \cdot \cos(2\pi - \beta) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) =$

$= \sin(\alpha - \beta);$

9) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi/4 + \alpha) - \operatorname{tg}(\pi/4 - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi/4 + \alpha) + \operatorname{tg}(\pi/4 - \alpha)} = \sin 2\alpha;$

10) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{2}{\cos 2\alpha}.$

646. 1) $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin 2\alpha;$

2) $\cos^2\alpha \cdot (1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = \cos 2\alpha;$

3) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha;$

4) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha};$

5) $\sin\alpha \cdot (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha;$

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha;$

7) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \cos 2\alpha;$

8) $\dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \dfrac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha};$

9) $\cos^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^4 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha$;

10) $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$.

647. 1) $\frac{\operatorname{ctg}(\alpha/2) - \operatorname{tg}(\alpha/2)}{\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \cos \alpha$;

2) $\frac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$;

3) $\frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos \alpha)} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$;

4) $2(1 + \cos \alpha) - \sin^2\alpha = 4\cos^4(\alpha/2)$;

5) $1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2(\alpha/2)}$;

6) $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{\cos \alpha}{\sin^2(\alpha/2)}$;

7) $2\left(\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4}\right) \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$;

8) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)} + \frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \operatorname{tg} \alpha$;

9) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \sin \alpha$;

10) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 1\right)^2 = 1 - \sin \alpha$.

§ 72. Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение

Докажите тождество **[648, 649]**.

648. 1) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}$;

2) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$;

3) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \operatorname{ctg} \frac{\beta - \alpha}{2}$;

4) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$;

5) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

6) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$;

7) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$;

8) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha}=\sin(\alpha+\beta)$;

9) $\dfrac{\sin\alpha-2\sin2\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha-2\cos2\alpha+\cos3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

10) $\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$.

649. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}-\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=0$;

2) $1+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\sin(\pi/4+\alpha)}{\sin(\pi/4)\cdot\sin\alpha}$;

3) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha}$;

4) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$;

5) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$;

7) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

8) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

9) $\dfrac{\operatorname{tg}^2(\pi/4+\alpha)-1}{\operatorname{tg}^2(\pi/4+\alpha)+1}=\sin2\alpha$;

10) $\dfrac{1+\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

11) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi/4+\alpha)+\operatorname{tg}(\alpha-\pi/4)}{\operatorname{ctg}(\alpha+\pi/4)+\operatorname{ctg}(\pi/4-\alpha)}=\sin2\alpha$;

12) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=\dfrac{\sin2\alpha}{\sin2\beta}$;

13) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\beta}=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta$.

§ 73. Тригонометрические уравнения и тригонометрические неравенства

Решите уравнение [650—653].

650. 1) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$;

2) $3\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$;

3) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$;

4) $\cos^3 x - \cos x = 0$;

5) $\cos x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = 0$;

6) $\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$;

7) $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x - 5 = 0$;

8) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2 = 0$;

9) $2\operatorname{tg} x \cdot \cos x - 2\cos x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$;

10) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$.

651. 1) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$;

2) $2\sin^3 x - 3\sin x \cdot \cos x = 0$;

3) $\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right) \cdot \cos x = -\frac{3}{4} + \sin^2 x$;

4) $1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 3x = \frac{1}{4\cos^2 3x}$;

5) $4\operatorname{tg}^2 3x - \frac{1}{\cos^2 3x} = 2$;

6) $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = \frac{25}{16}$;

7) $6\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$;

8) $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x$;

9) $2\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 2$;

10) $\cos^2(\pi/2 + x) + 2\cos x + 2 = 0$.

652. 1) $\sin(\pi/6 + x) + \sin(\pi/6 - x) = \frac{1}{2}$;

2) $\cos(x - \pi/6) - \cos(x + \pi/6) = 0$;

3) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$;

4) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$;

5) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$;

6) $\cos(\pi/4 + x) \cdot \cos(x - \pi/4) = -\frac{1}{2}$;

7) $\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$;

8) $4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=1$.

653. 1) $1-\cos x=\sin x$;

2) $1-\cos x=\operatorname{tg} x-\sin x$;

3) $\cos x+\cos 3x=\cos 5x+\cos 7x$;

4) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$;

5) $\sin 3x=\sin 2x-\sin x$;

6) $\cos x-2\cos 3x+\cos 5x=0$.

654. Решите неравенство:

1) $\sin x>-\frac{1}{2}$; 2) $|\sin x|<\frac{1}{2}$; 3) $\cos x>-1$;

4) $\cos x<\frac{1}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x>-\sqrt{3}$; 6) $|\operatorname{tg} x|<\sqrt{3}$;

7) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{1}{2}$; 8) $|\cos x|>\frac{\sqrt{2}}{2}$; 9) $\operatorname{ctg} x<-1$.

ОТВЕТЫ

650. 1) $2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; 4) πk, $\frac{\pi}{2}+\pi k$; 5) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; 6) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$; 7) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; 9) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$; 10) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **651.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; 2) πk, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; 3) $\pi+2\pi k$, $\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k$, $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi}{3}k$; 5) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k$; 6) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$; 7) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$; 8) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi k$; 9) $\frac{\pi}{4}(4k\pm 1)$; 10) $\pi(1+2k)$.

652. 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; 2) πk; 3) $(4k+1)\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi$; 4) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$; 5) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; 6) πk; 7) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; 8) $(4k+1)\frac{\pi}{8}$. **653.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\pi k$; 2) $2\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$; 3) $\frac{\pi}{4}k$; 4) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(3k+1)\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; 6) πk, $(2k+1)\frac{\pi}{6}$.

654. 1) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi k$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k$;

3) $\pi(2k-1)<x<\pi(2k+1)$; 4) $\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k$;

5) $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$; 6) $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{3}+\pi k$;

7) $-\frac{\pi}{12}+\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+\pi k$; 8) $-\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$; 9) $-\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\pi k$.

Глава 11. Элементы аналитической геометрии

§ 74. Прямая линия

Решите задачу [655, 656].

655. 1) На прямой $2x+y-6=0$ найдите точку M, равноудаленную от точек $A(3; 5)$ и $B(2; 6)$.

2) Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; -3)$ и $B\,(-1; 4)$.

3) Даны уравнения сторон треугольника: $x+3y-3=0$, $3x-11y-29=0$ и $3x-y+11=0$. Найдите вершины этого треугольника.

4) Даны уравнения сторон треугольника: $3x-2y-1=0$, $5x+4y-31=0$, $x-8y-15=0$. Найдите внутренние углы этого треугольника.

5) Точка P удалена от начала координат на 5 см. Угловой коэффициент прямой, соединяющей начало координат и точку P, равен 3/4. Найдите точку P.

6) Дан треугольник с вершинами $A(6; 8)$, $B(2; -4)$ и $C\,(-6; 4)$. Найдите угол φ между стороной AB и медианой, проведенной из вершины A.

7) Найдите острый угол φ между прямыми, проходящими через начало координат и через точки, которыми отрезок прямой $2x+y-12=0$, содержащийся между осями координат, делится в отношении $1:2:3$ (в направлении от оси Ox к оси Oy).

8) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x-3y+2=0$ и $5x+6y-4=0$ параллельно прямой $4x+y+7=0$.

9) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-y+4=0$ и $4x-6y+3=0$ перпендикулярно к прямой $5x+2y+6=0$.

656. 1) Прямая проходит через середину отрезка, соединяющего точки $A(-2; 1)$ и $B(4; 4)$, перпендикулярно к этому отрезку. Составьте уравнение этой прямой.

2) Дан треугольник с вершинами $A(4; 2)$, $B(6; -5)$ и $C(-5; 4)$. Составьте уравнения его высот.

3) Даны уравнения сторон треугольника: $3x - 10y + 28 = 0$, $5x + 4y + 26 = 0$ и $4x - 3y - 4 = 0$. Составьте уравнения его высот.

4) Вычислите расстояние от точки $M(6; 8)$ до прямой $4x + 3y + 2 = 0$.

5) Найдите расстояние между двумя параллельными прямыми $4x + 3y - 8 = 0$ и $4x + 3y - 33 = 0$.

6) Треугольник задан вершинами $A(-7; 3)$, $B(2; -1)$ и $C(-1; -5)$. Найдите: а) уравнение прямой AM, параллельной стороне BC; б) уравнение медианы AD; в) уравнение высоты BF; г) угол B; д) уравнение биссектрисы CN.

7) Треугольник задан вершинами $A(2; 6)$, $B(4; -2)$ и $C(-2; -6)$. Найдите: а) уравнение прямой BN, параллельной стороне AC; б) уравнение медианы CD; в) уравнение высоты AE; г) угол B; д) центр тяжести этого треугольника (точку пересечения его медиан).

ОТВЕТЫ

655. 1) $M(1; 4)$; 2) $7x + 3y - 23 = 0$; 3) $(6; -1)$, $(-5; -4)$ и $(-3; 2)$; 4) $\angle A = \operatorname{arctg} 3{,}143$; $\angle B = \operatorname{arctg} 1{,}63$; $\angle C = \operatorname{arctg} 1{,}1579$; 5) $P(4; 3)$ или $(-4; -3)$; 6) $\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}5$; 7) $\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}8889$; 8) $12x + 3y - 2 = 0$; 9) $4x - 10y + 1 = 0$. **656.** 1) $4x + 2y - 9 = 0$; 2) $11x - 9y - 26 = 0$, $9x - 2y - 64 = 0$, $2x - 7y + 38 = 0$; 3) $4x - 5y + 4 = 0$, $3x + 4y + 38 = 0$, $10x + 3y + 32 = 0$; 4) 10; 5) 5; 6. а) $4x - 3y + 37 = 0$, 6. б) $4x + 5y + 13 = 0$, 6. в) $3x - 4y - 10 = 0$, 6. г) $\operatorname{arctg} \frac{48}{11}$, 6. д) $x + y = 0$; 7. а) $3x - y - 14 = 0$, 7. б) $8x - 5y - 14 = 0$, 7. в) $3x + 2y - 18 = 0$, 7. г) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{14}{5}\right)$, 7. д) $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

§ 75. Геометрические места точек на плоскости. Кривые второго порядка

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

657. Составьте уравнение геометрического места точек на плоскости, если:

1) каждая из точек равноудалена от точек $A(2; 4)$ и $B(4; 6)$;

2) расстояние каждой из них от точки $A(6; 0)$ в три раза больше их расстояний от точки $B(2; 0)$;

3) сумма квадратов расстояний от каждой из них до двух данных точек $A(-6; 0)$ и $B(6; 0)$ есть величина постоянная и равна 104;

4) отношение расстояний от каждой из них до точки $A(1; 0)$ и до прямой $x = 9$ равно $\lambda = 1/3$;

5) при движении по плоскости точка остается вдвое ближе к точке $A(1; 0)$, чем к прямой $x = 4$;

6) расстояние каждой из точек вдвое ближе к прямой $x = 2$, чем к точке $A(8; 0)$;

7) каждая из точек равноудалена от оси Ox и от точки $A(0; -2)$;

8) расстояние каждой из точек от прямой $x = -2$ равно расстоянию от точки $A(3; -4)$.

ОКРУЖНОСТЬ

658. 1) Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(3; 1)$, $B(-2; 6)$ и $C(-5; -3)$.

2) Центр окружности находится в точке $O_1(-3; 1)$. Составьте уравнение окружности, если она касается прямой $4x + 3y - 16 = 0$.

3) Найдите уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$ и $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 58 = 0$.

4) Составьте уравнение окружности, проходящей через точку $A(5; 6)$, и концентрической с окружностью $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$.

5) Дана окружность $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$. Составьте уравнение диаметра, перпендикулярного хорде $x - 5y - 12 = 0$.

6) Составьте уравнение касательной, проведенной в точке $A(-2; 1)$ к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$.

ЭЛЛИПС

659. 1) Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если расстояние между фокусами равно 20, а эксцентриситет равен 5/6.

2) Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если он проходит через точки $A(\sqrt{2}; 2)$ и $B(2; \sqrt{3})$.

3) Составьте уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(6; 4)$ и $M_2(-8; 3)$.

4) Эксцентриситет эллипса равен $1/3$, ордината точки эллипса, абсцисса которой равна абсциссе фокуса, равна 4. Составьте уравнение эллипса.

5) Составьте уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен $1/3$ и абсцисса одного из фокусов равна $3/2$.

6) Вычислите координаты вершин, фокусов и эксцентриситет эллипса, уравнение которого имеет вид $4x^2 + 2y^2 = 1$.

ГИПЕРБОЛА

660. 1) Вычислите эксцентриситет, координаты фокусов и уравнения асимптот гиперболы с уравнением $4x^2 - 9y^2 = 36$.

2) Составьте уравнение гиперболы, асимптотами которой являются прямые $y = \pm\frac{3}{5}x$ и фокусы которой имеют координаты $(\pm 2; 0)$.

3) Составьте уравнение гиперболы, проходящей через точки $(5; 4/3)$ и $(\sqrt{34}; -5/3)$.

4) Чему равен эксцентриситет гиперболы, если известно, что угол между ее асимптотами равен $60°$?

5) Две вершины эллипса расположены в фокусах гиперболы, вершины которой лежат в фокусах эллипса с уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Составьте уравнение гиперболы.

6) Вычислите точки пересечения равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = 16$ с окружностью $x^2 + y^2 = 34$.

ПАРАБОЛА

661. 1) Вершина параболы лежит в точке $(2; 3)$; парабола проходит через начало координат, и ось ее параллельна оси Ox. Составьте уравнение параболы.

2) Вычислите координаты вершины и фокуса, уравнение оси и директрисы параболы, уравнение которой $x^2 - 8x - 16y + 32 = 0$.

3) Составьте уравнение параболы, вершины которой лежат в точке $(-1; -2)$, а фокус — в точке $(-1; -4)$.

4) Найдите координаты вершины и фокуса и составьте уравнения оси и директрисы параболы, уравнение которой $y^2 + 4y - 6x + 7 = 0$.

5) В параболу, уравнение которой $y^2 = 2px$, вписан равносторонний треугольник. Одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы. Найдите длину стороны треугольника.

6) Найдите точки пересечения двух парабол, имеющих общую вершину в началe координат, а фокусы в точках (2; 0) и (0; 2).

ОТВЕТЫ

657. 1) $x + y - 8 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 3x = 0$; 3) $x^2 + y^2 = 16$; 4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$; 5) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; 6) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$; 7) $x^2 + 4y + 4 = 0$; 8) $y^2 + 8y - 10x + 21 = 0$. **658.** 1) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$; 2) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$; 3) $4x - 7y + 29 = 0$; 4) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 97$; 5) $5x + y - 21 = 0$; 6) $x - y + 3 = 0$. **659.** 1) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{44} = 1$; 2) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$; 3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$; 4) $8x^2 + 9y^2 = 162$; 5) $8x^2 + 9y^2 = 162$; 6) $(\pm 1/2; 0)$, $(0; \pm\sqrt{2}/2)$; $(0; \pm 1/2)$; $\sqrt{2}/2$. **660.** 1) $\frac{\sqrt{13}}{3}$; $(\pm\sqrt{13}; 0)$; $y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$; 2) $153x^2 - 425y^2 = 450$; 3) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 5) $9x^2 - 7y^2 = 63$; 6) (5; 3); (−5; 3); (−5; −3); (5; −3). **661.** 1) $2y^2 - 12y + 9x = 0$; 2) (4; 1); (4; 5); $x = 4$; $y + 3 = 0$; 3) $x^2 + 2x + 8y + 17 = 0$; 4) (1/2; −2); (2; −2); $y + 2 = 0$; $x + 1 = 0$; 5) $4p\sqrt{3}$; 6) (0; 0); (8; 8).

Глава 12. Элементы дифференциального исчисления

§ 76. Приложения производной к исследованию функций

662. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^4 - 4x + 4$;
2) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;
3) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$;
4) $y = \frac{1}{x}$;
5) $y = 8x^2 - \ln x$.

663. Найдите промежутки выпуклости кривой:

1) $y = x^3 - 9x^2 + 10$; 2) $y = x^3 + 3x^2$;

3) $y = x^3 + 3x^2 + 24x - 8$; 4) $y = x^3 + 6x^2 + 4$;

5) $y = xe^x$.

664. Найдите точки перегиба кривой:

1) $y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$; 2) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$;

3) $y^3 = x - 1$; 4) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$;

5) $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}$.

665. Исследуйте на экстремум следующие функции:

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$; 2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$;

3) $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 10$; 4) $y = (x - 1)^3(x - 2)^2$;

5) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

666. 1) Какой из прямоугольников с площадью S имеет наименьшую диагональ?

2) Найдите диагональ прямоугольника, имеющего периметр $2p$ и наибольшую площадь.

3) Какой из прямоугольников с площадью a^2 имеет наименьший периметр?

4) Какой из прямоугольников с диагональю d имеет наибольший периметр?

5) В окружность радиуса r впишите прямоугольник с наибольшей площадью S.

6) В окружность радиуса r впишите равнобедренный треугольник с наибольшей площадью S.

7) Около окружности радиуса r опишите прямоугольный треугольник с наименьшим периметром P.

8) Около окружности радиуса r опишите равнобедренный треугольник с наименьшей площадью S.

9) Какой из прямоугольных треугольников с высотой h, опущенной из вершины прямого угла, имеет наименьшую гипотенузу?

10) Какой из треугольников со сторонами a и b имеет наибольшую площадь S?

11) Какой из треугольников с основанием a и противолежащим ему углом A имеет наибольшую высоту h?

12) Найдите катеты прямоугольного треугольника, вписанного в окружность радиуса r и имеющего наибольшую площадь.

13) Какой из треугольников с основанием a и периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

14) В круг с радиусом R вписан равнобедренный треугольник. При каком соотношении сторон треугольник будет иметь наибольшую площадь?

15) В полуокружность радиуса r вписан прямоугольник с наибольшей площадью. Найдите его измерения.

667. 1) В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите радиус основания цилиндра.

2) В шар радиуса R вписан цилиндр с наибольшей боковой поверхностью. Найдите высоту этого цилиндра.

3) Найдите радиус основания конуса, объем которого V и боковая поверхность имеет наименьшую величину.

4) В шар наименьшего радиуса вписан цилиндр, имеющий объем V. Найдите радиус основания R и высоту h этого цилиндра.

5) Найдите объем наименьшего из конусов, описанных около шара радиуса R.

6) В конус с радиусом основания $R_к$ впишите цилиндр наибольшего объема.

7) Найдите высоту конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

8) Найдите наибольший объем правильной четырехугольной призмы, вписанной в шар радиуса R.

9) В шар радиуса R впишите правильную треугольную призму с наибольшим объемом.

668. Составьте уравнение касательной и нормали к данной кривой в данной на ней точке:

1) $x^2 + y^2 = 36$, $M(2; 3)$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$, $M(4; 5)$;

3) $y = x^2 - x$ в точке $y = 2$; 4) $y = x^3 - 3x^2 + 2$, $M(2; 4)$.

ОТВЕТЫ

662. 1) $-\infty < x < 1$ убывает, $1 < x < +\infty$ возрастает; 2) $-\infty < x < 0$ возрастает, $0 < x < 2$ убывает, $2 < x < +\infty$ возрастает; 3) $-\infty < x < 0$ убывает, $0 < x < 1$ возрастает, $1 < x < +\infty$ убывает; 4) $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$ убывает; 5) $0 < x < \frac{1}{4}$ убывает, $\frac{1}{4} < x < +\infty$ возрастает. **663.** 1) $-\infty < x < 3$ выпукла вверх, $3 < x < +\infty$ выпукла вниз; 2) $-\infty < x < -1$ выпукла вверх, $-1 < x < +\infty$ выпукла вниз; 3) $-\infty < x < -1$ выпукла вверх, $-1 < x < +\infty$ выпукла вниз; 4) $-\infty < x < -2$ выпукла вверх, $-2 < x < +\infty$ выпукла вниз; 5) $-\infty < x < -2$ выпукла вверх, $-2 < x < +\infty$ выпукла вниз. **664.** 1) $(3; -4)$; 2) $(0; 0)$; 3) $(1; 0)$; 4) $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; 5) $(-1; -1)$.

665. 1) max $(-1; 2)$, min $\left(3; -8\frac{2}{3}\right)$; 2) max $(1; 1)$, min $(3; -3)$; 3) экстремумов не имеет; 4) max $(8/5; 108/3125)$, min $(2; 0)$; 5) max $(1; 1/2)$, min $(-1; -1/2)$. **666.** 1) Квадрат со стороной $\sqrt{S}$; 2) $\frac{p\sqrt{2}}{2}$; 3) квадрат со стороной a; 4) квадрат со стороной $d/\sqrt{2}$; 5) квадрат, $S = 2r^2$; 6) равносторонний треугольник, $S = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$; 7) $2p = 2r(3 + 2\sqrt{2})$; 8) равносторонний треугольник, $S = 3r^2\sqrt{3}$; 9) равнобедренный с гипотенузой $2h$; 10) прямоугольный, $S = ab/2$; 11) равнобедренный, $h = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$; 12) $r\sqrt{2}$; 13) равнобедренный со стороной $(2p - a)/2$; 14) равносторонний со стороной $R\sqrt{3}$; 15) $r\sqrt{2}$, $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. **667.** 1) $\frac{R\sqrt{6}}{3}$; 2) $R\sqrt{2}$; 3) $\sqrt[6]{\frac{9v^2}{2\pi^2}}$; 4) $R = \sqrt[6]{\frac{v^2}{2\pi^2}}$, $h = \sqrt[3]{\frac{2v}{\pi}}$; 5) $\frac{8\pi R^3}{3}$; 6) $R_ц = \frac{2}{3}R_к$; 7) $\frac{4R}{3}$; 8) куб, $V = \frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$; 9) R^3. **668.** 1) $2x + 3 + y - 13 = 0$, $3x - 2y = 0$; 2) $x - y + 1 = 0$, $x + y - 9 = 0$; 3) $(3x - y - 4 = 0$, $3x + y + 1 = 0)$, $(x + 3y - 8 = 0$, $x - 3y + 7 = 0)$; 4) $y = 2x$, $x + 2y - 10 = 0$.

§ 77. Физические приложения производной

669. 1) Точка движется прямолинейно по закону $S = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 5t + 3$. Найдите максимальную скорость движения этой точки (S в м, t в с).

2) Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением $S = V_0t - \frac{1}{2}gt^2$. Найдите наибольшую высоту подъема (S в м, t в с).

3) Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением $S = 19{,}6t - 4{,}9t^2$. Найдите наибольшую высоту подъема тела.

ОТВЕТЫ

669. 1) 14 м/с; 2) $v_0^2/2g$; 3) 19,6 м.

Глава 13. Элементы интегрального исчисления

§ 78. Геометрические приложения неопределенного интеграла

670. Составьте уравнение кривой, если:

1) угловой коэффициент касательной в каждой ее точке (x, y) равен $2x$;

2) угловой коэффициент касательной к кривой в любой ее точке равен $\frac{y}{x}$;

3) касательная в любой точке кривой имеет угловой коэффициент, равный ординате точки касания, и кривая проходит через точку $A(0; 1)$;

4) угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен: а) $-3x$; б) $x + 2$;

5) угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен: а) $-\frac{y}{x}$; б) $\frac{x}{y}$; в) $-\frac{x}{y}$;

6) угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен $\frac{x}{3}$ и кривая проходит через начало координат;

7) угловой коэффициент к кривой в каждой ее точке равен $3x^2 - 2x$ и кривая проходит через точку $M(1; 4)$;

8) угловой коэффициент в каждой ее точке равен утроенному квадрату абсциссы точки касания и кривая проходит через точку $A(-1; 3)$.

ОТВЕТЫ

670. 1) $y = x^2 + C$; 2) $y = Cx$; 3) $y = e^x$; 4. а) $y = -\frac{3x^2}{2} + C$, 4. б) $y = \frac{x^2}{2} + 2x + C$; 5. а) $y = \frac{C}{x}$, 5. б) $x^2 - y^2 = C$, 5. в) $x^2 + y^2 = C$; 6) $y = \frac{1}{6}x^2 + C$; 7) $y = x^3 - x^2 + 4$; 8) $y = x^3 + 4$.

§ 79. Физические приложения неопределенного интеграла

671. 1) Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = t^2 - 8t + 2$. Найдите закон движения точки.

2) Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 4$. Найдите закон движения S, если за время $t = 2$ с точка прошла 20 м.

3) Найдите закон движения свободно падающего тела при постоянном ускорении g, если в начальный момент движения тело находилось в покое.

4) Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найдите закон движения этого тела (сопротивлением воздуха можно пренебречь). При решении принять $\frac{dv}{dt} = -g$. При $t = 0$ скорость движения равна v_0 м/с. Скорость равнозамедленного движения под действием силы тяжести выражается формулой $v = -gt + v_0$.

5) Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 6t - 12$. В момент времени $t = 0$ (начало отсчета) начальная скорость $v_0 = 9$ м/с; расстояние от начала отсчета $S_0 = 10$ м. Найдите: а) скорость и закон движения точки; б) величины ускорения, скорости и пути в момент $t = 2$ с; в) момент, когда скорость окажется наименьшей.

6) Скорость прямолинейного движения точки задана формулой $v = 2\cos t$. Найдите закон движения, если в момент $t = \pi/6$ точка находилась на расстоянии $S = 4$ м от начала отсчета.

7) Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 12t^2 + 6t$. Найдите закон движения точки, если в момент $t = 1$ с ее скорость $v = 8$ м/с, а путь $S = 6$ м.

8) Точка движется прямолинейно с ускорением $a = -6t + 18$. В момент времени $t = 0$ (начало отсчета) начальная скорость $v_0 = 24$ м/с, расстояние от начала отсчета $S_0 = 15$ м. Найдите: а) скорость и закон движения точки; б) величины ускорения, скорости и пути в момент $t = 2$ с; в) момент, когда скорость является наибольшей.

ОТВЕТЫ

671. 1) $S = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 2t + C$; 2) $S = t^3 + 4t + 4$; 3) $S = \frac{1}{2}gt^2$; 4) $S = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$; 5. а) $v = 3t^2 - 12t + 9$, $S = t^3 - 6t^2 + 9t + 10$; 5. б) при $t = 2$ с: $a = 0$, $v = -3$ м/с, $S = 12$ м; 5. в) при $t = 2$ с скорость является наименьшей; 6) $S = 2\sin t + 3$; 7) $t^4 + t^3 + t + 3$; 8. а) $v = -3t^2 + 18t + 24$, $S = -t^3 + 9t^2 + 24t + 15$, 8. б) $a_{t=2} = 6$ м/с^2, $v_{t=2} = 48$ м/с, $S_{t=2} = 91$ м; 8. в) $V_{max} = V_{t=3} = 51$ м/с.

§ 80. Определенный интеграл

672. Вычислите интеграл:

1) $\int_1^4 \left(3\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$;
2) $\int_0^{2\pi/3} \cos\frac{x}{4}\, dx$;

3) $\int_0^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}}$;
4) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{3\cos^2\frac{x}{3}}$;

5) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{2\sin x + 1}$;
6) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{1 + \cos^2 x}$;

7) $\int_0^{\pi/2} 3\sin^2 x \cos x\, dx$;
8) $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{3 + x^2}$.

673. Вычислите площади фигур, ограниченных данными линиями:

1) $y^2 - 9x = 0$, $y = 3x$;
2) $y = 4 - x^2$, $y = 0$;
3) $y^2 = x + 2$, $x = 0$;
4) $y = \frac{1}{4}x^3$, $y = 2x$;
5) $y = x^2 - 4x + 5$, $x - y + 5 = 0$;

6) $y = x^2 - 8x + 16$, $x + y - 6 = 0$;
7) $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$;
8) $y = -x^2 + 6x - 5$, $y = 0$;
9) $xy = a^2$, $x = a$, $x = 2a$, $y = 0$;
10) $3y^2 - 16x + 32 = 0$, $4x - 3y - 8 = 0$;
11) $4x^2 - 9y + 18 = 0$, $2x^2 - 9y + 36 = 0$;
12) $5x^2 - 60x + 4y + 160 = 0$, $x^2 - 12x + 2y + 32 = 0$;
13) $x^2 = 9y$, $x - 3y + 6 = 0$.

674. Найдите объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox площади, ограниченной данными линиями:

1) $y^2 - 4x = 0$, $x - 4 = 0$, $y = 0$;
2) $y^2 - x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $y = 0$;
3) $y^2 - 4x = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $y = 0$;
4) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$;
5) $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$;
6) $y^2 = x + 2$, $x = 0$, $y = 0$;
7) $y^2 - 6x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;
8) $y = -x^2 + 3x$, $y = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ВЫЧИСЛЕНИЮ РАБОТЫ, ДАВЛЕНИЯ И ДРУГИХ ВЕЛИЧИН

675. 1) Уравнение скорости прямолинейного движения точки $v = 3t^2 - 2t - 1$ (t в с, v в м/с). Найдите путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

2) Уравнение скорости прямолинейного движения точки $v = 6t^2 - 10t$. Найдите путь, пройденный точкой за третью секунду.

3) Вычислите работу, совершенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила $F = 20$ Н.

4) Вычислите работу, совершенную при сжатии пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,05 м была затрачена работа $A = 25$ Дж.

5) Вычислите работу, затраченную на выкачивание воды из резервуара, имеющего форму конуса (с вершиной внизу) с радиусом основания $R = 2$ м и высотой $H = 3$ м, наполненного доверху водой (вес воды в объеме 1 м^3 составляет приблизительно 9807 Н).

6) Вычислите работу, затраченную на выкачивание воды из резервуара, имеющего форму цилиндра с радиусом $R = 2$ м и высотой $H = 1$ м, наполненного доверху водой.

7) Вычислите силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму прямоугольника с основанием 4 м и высотой 2 м. Верхнее основание находится на поверхности воды.

8) Вычислите силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму треугольника с основанием 5 м и с высотой 3 м. Вершина треугольника находится на поверхности воды, а основание параллельно ей.

ОТВЕТЫ

672. 1) 22; 2) 2; 3) $\pi/8$; 4) $2\sqrt{3}/3$; 5) $(1/2)\ln 3$; 6) $\pi/4$; 7) 1; 8) $\sqrt{3}\pi/36$.

673. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 4) 8; 5) $20\frac{5}{6}$; 6) $4\frac{1}{2}$; 7) $\frac{4}{3}$; 8) $10\frac{2}{3}$; 9) $a^2\ln 2$; 10) 2; 11) 8; 12) 8; 13) $13\frac{1}{2}$. **674.** 1) 32π; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 24π; 4) $\pi^2/4$; 5) $16\pi/15$; 6) 2π; 7) 9π; 8) $8{,}1\pi$. **675.** 1) 95 м; 2) 13 м; 3) 1,6 Дж; 4) 100 Дж; 5) 29 421 π Дж; 6) 19 614 π Дж; 7) 78 456 Н; 8) 147 105 Н.

ЧАСТЬ 4. УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ ЗА КУРС ДЕВЯТИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

Глава 14. Арифметические и алгебраические действия

§ 81. Арифметические действия

676. Выполните упражнения на совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями:

1) $1\frac{7}{20} : 2{,}7 + 2{,}7 : 1{,}35 + \left(0{,}4 : 2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(4{,}2 - 1\frac{3}{40}\right);$

2) $\left(7\frac{2}{3} - 6\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{14}\right) : \left(8{,}75 \cdot \frac{2}{7} - 1\frac{1}{6}\right) + \frac{7}{18} : \frac{14}{27};$

3) $\left(\frac{0{,}216}{0{,}15} + \frac{2}{3} : \frac{4}{15}\right) + \left(\frac{196}{225} - \frac{7{,}7}{24\frac{3}{4}}\right) + 0{,}695 : 1{,}39;$

4) $15 : \dfrac{(0{,}6 + 0{,}425 - 0{,}005) : 0{,}01}{30\frac{5}{9} + 3\frac{4}{9}};$

5) $\dfrac{\left(\frac{7}{15} + \frac{14}{45} + \frac{2}{9}\right) \cdot 10\frac{1}{3} - 1\frac{1}{11}\left(2\frac{2}{3} - 1{,}75\right)}{\left(\frac{3}{7} - 0{,}25\right) : \frac{3}{28} - 1};$

6) $\dfrac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1{,}25) : 2{,}5};$

7) $\dfrac{\left(1{,}75 : \frac{2}{3} - 1{,}75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80} - 0{,}0325\right) : 400};$

8) $\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}$;

9) $\dfrac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\dfrac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}$;

10) $\left(46\frac{2}{25}:12+41\frac{23}{35}:260\frac{5}{14}+800:12\frac{28}{31}\right)\times$

$\times\dfrac{0{,}8\cdot 7{,}2\cdot 4{,}5\cdot 1{,}3}{6{,}5\cdot 2{,}7\cdot 1{,}92}$.

ПРОПОРЦИИ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ

677. Решите пропорцию:

1) $\frac{1}{4}x:\frac{1}{8}=3{,}05:1\frac{21}{40}$;

2) $2{,}5:0{,}125=1{,}5x:0{,}75$;

3) $\frac{1}{3}x:2{,}4=15{,}25:7\frac{5}{8}$;

4) $\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}x=0{,}25:2{,}5$.

678. Выполните упражнение на пропорциональное деление:

1) разделите 798 пропорционально числам 2/3, 3/4 и 4/5;
2) разделите 765 пропорционально числам 1/5, 1/4 и 0,3;
3) разделите 434 пропорционально числам 1/2, 1/3 и 0,2;
4) разделите 705 пропорционально числам 1/5, 2/3 и 0,7.

ПРОЦЕНТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

679. Запишите проценты в виде десятичных дробей:

1) 12,5%; 2) 0,5%; 3) 1,8%;

4) $16\frac{1}{4}$%; 5) $\frac{3}{4}$%; 6) 10%.

680. Запишите в процентах число:

1) 2; 2) $3\frac{1}{5}$; 3) 0,6;

4) 10; 5) 2,4; 6) 1.

681. Найдите:

1) 3,5% от 154; 2) 16,8% от 42,5; 3) 32% от 12,5;

4) $\frac{1}{3}$ % от 360; 5) 7% от 48.

682. Найдите число по его проценту:

1) $4\frac{3}{4}$ % равны 589; 2) $10\frac{3}{4}$ % равны 8,6;

3) 9,5% равны 17,1; 4) 28,5% равны 171;

5) 7,5% равны 3,3.

683. Найдите процентное отношение двух чисел:

1) 0,75 от $\frac{5}{8}$; 2) $5\frac{1}{2}$ от 4,4;

3) 1,28 от 3,2; 4) 5,5 от 8,8;

5) 3,2 от 1,28.

ОТВЕТЫ

676. 1) 3; 2) $4\frac{3}{4}$; 3) 5; 4) 5; 5) 14; 6) 2,5; 7) 2500; 8) $2\frac{17}{21}$; 9) 6; 10) 66.

677. 1) 1; 2) 10; 3) 14,4; 4) 5. **678.** 1) 240, 270, 288; 2) 204, 255, 306; 3) 210, 140, 84; 4) 90, 300, 315. **679.** 1) 0,125; 2) 0,005; 3) 0,018; 4) 0,1625; 5) 0,0075; 6) 0,1. **680.** 1) 200%; 2) 320%; 3) 60%; 4) 1000%; 5) 240%; 6) 100%. **681.** 1) 5,39; 2) 7,14; 3) 4; 4) 1,2; 5) 3,36. **682.** 1) 12 400; 2) 80; 3) 180; 4) 600; 5) 44. **683.** 1) 120%; 2) 125%; 3) 40%; 4) 62,5%; 5) 250%.

§ 82. Алгебраические действия

684. Разложите на множители и сократите дробь:

1) $a^3 + 2a^2 - 2a - 4$; 2) $2b^3 - 2ab^2 - a^2b + a^3$;

3) $(2a - 3b)^2 - 4b^2$; 4) $9(5a - 4b)^2 - 64a^2$;

5) $x^2 - x^4 - 3x + 3x^3$; 6) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$;

7) $\frac{1 - 2a + a^2}{a^2 - 1}$; 8) $\frac{y^4 - x^4}{x^3 - y^3}$;

9) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2a^4 - 2b^4}$; 10) $\frac{a^3 + 1}{6a^2 + 12a + 6}$.

685. Выполните указанные действия:

1) $\dfrac{1}{3m-2} - \dfrac{4}{2+3m} - \dfrac{3m-5}{4-9m^2}$;

2) $\dfrac{1}{2x+2} - \dfrac{x-1}{3x^2+6x+3}$;

3) $\left(\dfrac{3a}{1-3a} + \dfrac{2a}{3a+1}\right) \cdot \dfrac{1-6a+9a^2}{6a^2+10a}$;

4) $\left(\dfrac{3}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{x^3+1}\right) \cdot \left(x - \dfrac{2x-1}{x+1}\right)$;

5) $\left(\dfrac{x-3}{x^2-3x+9} - \dfrac{xy-3y}{x^3+27}\right) : \dfrac{x-y+3}{x^3y+27y}$;

6) $\left(\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{3xy}{y^3-x^3}\right) : \dfrac{x-y}{2(x+y)}$;

7) $\left(\dfrac{5x}{x+y} + \dfrac{5y}{x-y} + \dfrac{10xy}{x^2-y^2}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{x-y} - \dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)$;

8) $\left(a+1-\dfrac{1}{1-a}\right) : \left(a - \dfrac{a^2}{a-1}\right)$;

9) $\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{a}{b} + 1\right) : \dfrac{a^3-b^3}{b^2}$;

10) $\dfrac{a^2}{a^2-b^2} - \dfrac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\dfrac{a}{ab+b^2} + \dfrac{b}{a^2+ab}\right)$.

ОТВЕТЫ

684. 1) $(a+2)(a^2-2)$; 2) $(b-a)(2b^2-a^2)$; 3) $(2a-5b)(2a-b)$; 4) $(7a-12b)(23a-12b)$; 5) $x(1-x)(x^2+x-3)$; 6) $(x^2+1)(x-1)(x^2+x+1)$; 7) $\dfrac{a-1}{a+1}$; 8) $-\dfrac{(x+y)(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2}$; 9) $\dfrac{a+b}{2(a-b)(a^2+b^2)}$; 10) $\dfrac{a^2-a+1}{6(a+1)}$. **685.** 1) $\dfrac{5-6m}{(3m-2)(3m+2)}$; 2) $\dfrac{x+5}{6(x+1)^2}$; 3) $\dfrac{1-3a}{2(1+3a)}$; 4) 1; 5) $y(x-3)$; 6) $\dfrac{2(x+y)}{x^2+xy+y^2}$; 7) 5; 8) $-a$; 9) $\dfrac{1}{a-b}$; 10) $\dfrac{ab}{(a-b)(a+b)}$.

Глава 15. Линейные уравнения и системы линейных уравнений. Линейные неравенства и системы линейных неравенств. Дробные показатели

§ 83. Линейные уравнения и системы линейных уравнений

686. Решите уравнение:

1) $\frac{x-5}{2}+\frac{x-1}{8}=\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3}$;

2) $2x+\frac{3x-1}{2}-\frac{5x-2}{3}-2=0$;

3) $\frac{26x-51}{52}-\frac{2(1-3x)}{13}=x-\frac{20x-(10-3x)}{156}$;

4) $\frac{3x+2}{18}-\frac{5x-8}{24}=\frac{3(2x+1)}{36}-\frac{x-1}{6}-\frac{2}{9}$;

5) $\frac{2x-5}{6}+\frac{x+2}{4}=\frac{5-2x}{3}-\frac{6-7x}{4}-x$;

6) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$;

7) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$;

8) $\frac{4x+1}{x^2+4x+4}+\frac{2x+1}{x+2}=2$;

9) $\frac{z+2}{z-2}=\frac{z^2}{z^2-4}+\frac{6}{2+z}$;

10) $\frac{1}{2}+\frac{2}{x+2}=\frac{13}{8}-\frac{5x}{4x+8}$.

687. Решите систему линейных уравнений с двумя переменными:

1) $\begin{cases} 5x-2y=7, \\ 3x+4y=25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{3x-1}{5}+3y=19, \\ \frac{3y-5}{6}+2x=\frac{47}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{7+x}{5} - \dfrac{2x-y}{4} = 3y - 5, \\ \dfrac{5y-7}{6} + \dfrac{4x-3}{2} = 20 - 5x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{3y-2}{4} = 2, \\ \dfrac{3x+1}{5} - \dfrac{3y+2}{4} = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2 - \dfrac{5x+3y}{7} = y - \dfrac{9y+11}{14}, \\ y + 2 - \dfrac{4y-3x}{2} = x - \dfrac{2y-5}{5}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{3x-5y}{2} + 3 = \dfrac{2x+y}{5}, \\ 8 - \dfrac{x-2y}{5} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{2(x-y)}{3} + \dfrac{8}{5} = \dfrac{8x}{15} - \dfrac{3y-10}{5}, \\ \dfrac{3x+4}{4} + \dfrac{y}{8} = \dfrac{5x}{6} - \dfrac{y-17}{12}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+3}{3} - \dfrac{x-2y+3}{4} = 4, \\ \dfrac{3x-4y+3}{4} + \dfrac{4x-2y-9}{3} = 4; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{4x-3y}{2} + \dfrac{2x-3y}{3} - y = 1, \\ \dfrac{5x-3y}{3} + \dfrac{3x-2y}{5} - x = 1; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + \dfrac{y}{5} = -2, \\ \dfrac{2x-y}{3} - \dfrac{3x}{4} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

ОТВЕТЫ

686. 1) 13; 2) 1; 3) 11; 4) 10; 5) 1; 6) 1; 7) −1; 8) 5; 9) 8; 10) 2.
687. 1) (3; 4); 2) (7; 5); 3) (3; 2); 4) (3; 2); 5) (4; 5); 6) (12; 6); 7) (5; 4); 8) (7; 5); 9) (3; 2); 10) (2; −5).

§ 84. Линейные неравенства и системы линейных неравенств с одной переменной

688. Решите неравенство:

1) $\frac{6x-7}{2}-10x>-\frac{20x+1}{3}-2;$

2) $\frac{4-3x}{3}<\frac{2x-1}{4}-\frac{5x-2}{6};$

3) $\frac{4x+1}{8}-\frac{7}{2}>\frac{x}{3}-5;$

4) $\frac{7-6x}{2}-\frac{8x+1}{3}+10x<-12;$

5) $\frac{37-2x}{3}-\frac{3x-8}{4}+x<-9.$

689. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}-x>-1,\\ \frac{x+1}{2}-x<\frac{x-1}{3};\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{x-3}{2}>\frac{x-1}{3},\\ \frac{2-x}{4}<\frac{3-2x}{3};\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{5-x}{8}+\frac{3-2x}{4}>0,\\ \frac{3x-5}{2}+2<\frac{2x-1}{3};\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{7-x}{2}<\frac{3+4x}{5}-1,\\ \frac{5}{3}x+5(4-x)<8-2x;\end{cases}$

5) $\begin{cases}12-\frac{1}{3}\left(47-\frac{60}{x}\right)>3,\\ 2-\frac{5+x}{7}<1-\frac{9-x}{14}.\end{cases}$

690. Решите неравенство:

1) $\frac{5-x}{2-3x}\geqslant 0;$

2) $\frac{x-11}{2x-5}<0;$

3) $\frac{3x+1}{2x+3}>0;$

4) $\frac{3-5x}{2x-5}<-3;$

5) $\frac{2x-1}{3x+4}>1.$

ОТВЕТЫ

688. 1) $-\infty < x < -7/2$; 2) $17/13 < x < +\infty$; 3) $-9{,}75 < x < +\infty$; 4) $-\infty < x < -3{,}5$; 5) $56 < x < +\infty$. **689.** 1) $1 < x < 12$; 2) решения нет; 3) $-\infty < x < 1/5$; 4) $9 < x < +\infty$; 5) нет решения. **690.** 1) $-\infty < x < \frac{2}{3}$, $5 \leqslant x < +\infty$; 2) $5/2 < x < 11$; 3) $-\infty < x < -3/2$, $-1/3 < x < +\infty$; 4) $5/2 < x < 12$; 5) $-5 < x < -4/3$.

§ 85. Действия с дробными показателями и корнями

Выполните действия [691, 692].

691. 1) $27^{2/3} \cdot 9^{0,5} \cdot 3^{-2} + \left(\left(\frac{5}{7}\right)^3\right)^0 - (-2)^2 + \left(-3\frac{3}{8}\right)^{-1/3}$;

2) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810\,000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{1/5} + (0{,}63)^0$;

3) $\left((2^{-6})^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{-5} + 4^{-6} \cdot (0{,}25)^{-7}\right) : \left(\left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 1024\right)$;

4) $(-0{,}5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-3/2} + 19 \cdot (-3)^{-3}$;

5) $(0{,}0625)^{0,25} + (-2)^{-2} - (7 + 2^{-1})^0 + (25^{-0,4} \cdot 5^{1/2} \cdot 5^{4/5})^2$;

6) $\dfrac{9^{-1/2} - (2/3)^{-2}}{(1/8)^{-1/3} - (3/4)^2} \cdot \left(4^0 - \frac{1}{6}\right)^{-1} + 5 \cdot 10^{-1}$.

692. 1) $\dfrac{a^{5/4} - a^{-2}}{a^{-1\frac{3}{4}} - a^{-2}} - \dfrac{a^{1/2} - a^{-1,5}}{a^{1} - a^{1,5}}$;

2) $(a^{1/3} - x^{1/3})^{-1} \cdot (a - x)$;

3) $\dfrac{m + n}{m^{2/3} - m^{1/3}n^{1/3} + n^{2/3}} + \dfrac{m - n}{m^{2/3} + m^{1/3}n^{1/3} + n^{2/3}} - \dfrac{m^{2/3} - n^{2/3}}{m^{1/3} - n^{2/3}}$;

4) $\dfrac{(x - y)^2}{x^{3/2} - y^{3/2}} + \dfrac{x^2 - y^2}{(x^{1/2} + y^{1/2})(x + x^{1/2}y^{1/2} + y)}$;

5) $\dfrac{1 - a^{-0,6}}{a^{0,4} - a^{-0,6}} - \dfrac{a^{0,8} + a^{-0,2}}{a^{0,6} + a^{0,4}}$;

6) $\dfrac{a - x}{a^{1/2} - x^{1/2}} - \dfrac{a^{3/2} - x^{3/2}}{a - x}$;

7) $\dfrac{a^{1/2}\, b^{1/2}}{c^{1/6}} : \left(\dfrac{c^{-1/2}}{a^{-1/3}\, b^{-1/3}} \cdot \dfrac{a^{-5/6}\, c^{-2/3}}{b^{5/6}}\right)$.

ДЕЙСТВИЯ С КОРНЯМИ

693. Выполните действия (при выполнении действий замените корни дробными показателями):

1) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x}} - \left(\dfrac{a - \sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{ax}} - \sqrt[4]{ax}\right) : (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x})$;

2) $\dfrac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{a}}{(a + 2) \cdot \sqrt[4]{a^{-1} b^2}} - \dfrac{a^2 + 4}{a^2 - 4}$;

3) $\dfrac{a^{3/2} + b^{3/2}}{(a^2 - ab)^{2/3}} : \dfrac{\sqrt[3]{a^{-1} - a^{-2} b}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} - ab - \dfrac{1}{(a^2 + b^2)^{-1}}$;

4) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^3 b^{-3}} - \sqrt{b^3 a^{-3}}\right) : \left(\dfrac{a^2 + b^2}{ab} + 1\right) \cdot \dfrac{2(a - b)^{-1}}{(ab)^{-1/2}}$;

5) $a^{1/2} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{x})^{-2} \cdot \left(\left(\dfrac{a - x}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}\right)^2 - 4(ax)^{1/2}\right)^{1/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}$;

6) $\left(\dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}\right)^2$.

ОТВЕТЫ

691. 1) $-\frac{2}{3}$; 2) $37\frac{1}{2}$; 3) -6; 4) 10; 5) $4\frac{3}{4}$; 6) $-1,1$. **692.** 1) $2 - a^{1/4}$; 2) $2a^{1/3}x^{1/3}$; 3) $m^{1/3} - n^{1/3}$; 4) $2(x^{1/2} - y^{1/2})$; 5) $a^{2/5} + 1$; 6) $\dfrac{a^{1/2} \cdot x^{1/2}}{a^{1/2} + x^{1/2}}$; 7) abc. **693.** 1) $2 \cdot \sqrt[4]{x}$; 2) $\dfrac{2}{2 - a}$; 3) 0; 4) 1; 5) 1; 6) 1.

Глава 16. Квадратные уравнения и квадратные неравенства. Прогрессии

§ 86. Квадратные уравнения и системы уравнений второй степени с двумя переменными

694. Решите уравнение:

1) $\frac{9(x+5)}{2(x^2-9)} + \frac{2x}{3-x} = \frac{x+1}{2x+6}$;

2) $\frac{2}{2x-1} - \frac{3}{2x+1} - \frac{6}{4x^2-1} = -1$;

3) $\frac{3}{2(1-x)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{x^2-1}$;

4) $\frac{x+36}{x^3-1} - \frac{x+6}{x-1} + \frac{x^2-x+16}{x^2+x+1} = 0$;

5) $\frac{3x^2-38}{x^2-1} - \frac{x+4}{2x-2} - \frac{7}{x+1} = 0$;

6) $\frac{x+36}{x^3-1} + \frac{x-6}{x-1} - \frac{x^2-x+16}{x^2+x+1} = 0$;

7) $\frac{6}{4x^2-1} - \frac{2}{2x-1} + \frac{3}{2x+1} - 2 = 0$;

8) $\frac{4x^2}{x^2-1} + \frac{x-2}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} = 0$;

9) $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x+3}{x-3} - 1$;

10) $\frac{5x^2+9}{6} - \frac{4x^2-9}{5} = 3$.

695. Сократите дробь:

1) $\frac{2x^2-9x+10}{2x^2+x-15}$;

2) $\frac{3x^2-8x-3}{6x^2+13x-5}$;

3) $\frac{6x^2+5x-4}{3x^2+19x+20}$;

4) $\frac{4+3a-a^2}{3a^2+4a+1}$.

696. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 2xy - 4y^2 - 5x + 4 = 0, \\ x - y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 17xy, \\ x + y = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8y^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 13, \\ x - y = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{13}{6}, \\ x + y = 1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y + 1}{y^2 + x + 1} = \dfrac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{26}{5}, \\ x^2 - y^2 = 24. \end{cases}$

ОТВЕТЫ

694. 1) −3,2; 2) 1; 3) −4; 4) −7/9, 2; 5) −2,2, 6; 6) действительных корней не имеет; 7) 3/4; 8) 0; 3/2; 9) 1; 6; 10) действительных корней не имеет. **695.** 1) $\dfrac{x-2}{x+3}$; 2) $\dfrac{x+3}{2x+5}$; 3) $\dfrac{2x-1}{x+5}$; 4) $\dfrac{4-a}{3a+1}$. **696.** 1) (4; 2), (3; 1); 2) (−3; −1), (−1; −3), (3; 1), (1; 3); 3) (8; 2), (2; 8); 4) (1; 3), (19; −3); 5) (7; 6); 6) (−3; −2), (−2; −3), (2; 3), (3; 2); 7) (3; −2), (−2; 3); 8) (−3; −4), (−4; −3), (3; 4), (4; 3); 9) (3; 2), (2; 1); 10) (−2; −3), (2; 3); 11) (2; −3), (−2; 3), (−3; −2), (3; 2); 12) (5; 1), (−5; −1).

§ 87. Квадратные неравенства

Решите неравенство [**697**, **698**].

697. 1) $x^2 - x - 12 \geqslant 0$;
2) $-x^2 + x + 2 > 0$;
3) $x^2 + 6x + 9 < 0$;
4) $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$;
5) $x^2 + 2x + 1 > 0$;
6) $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$;
7) $-x^2 + 6x - 5 \leqslant 0$;
8) $2x^2 - 4x + 7 > 0$;
9) $-x^2 + 6x - 5 \geqslant 0$;
10) $-x^2 + 4x - 5 > 0$.

698. 1) $\frac{x+1}{x-2} > 3$; 2) $\frac{x-1}{x-3} < 3$; 3) $\frac{x-1}{x-3} > 3$;

4) $\frac{x-1}{x+3} < \frac{x+3}{x-1}$; 5) $\frac{x-2}{x+4} > \frac{x+4}{x-2}$; 6) $\frac{x}{x-1} > 0$.

699. Решите неравенство методом промежутков:

1) $(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-2) > 0$;

2) $\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+1}{x-2} > 0$;

3) $(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x-1) > 0$;

4) $(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x-4) < 0$;

5) $(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4) > 0$;

6) $\frac{x-1}{x+3} > \frac{x+3}{x-1}$.

ОТВЕТЫ

697. 1) $-\infty < x \leqslant -3$, $4 \leqslant x < +\infty$; 2) $-1 < x < 2$; 3) решения нет; 4) $2 \leqslant x \leqslant 4$; 5) $-\infty < x < -1$, $-1 < x < +\infty$; 6) $-\infty < x \leqslant 1$, $3 \leqslant x < +\infty$; 7) $-\infty < x \leqslant 1$, $5 \leqslant x < +\infty$; 8) $-\infty < x < +\infty$; 9) $1 \leqslant x \leqslant 5$; 10) решения нет. **698.** 1) $-\infty < x \leqslant 1$, $3 \leqslant x < +\infty$; 2) $-\infty < x < 3$, $5 < x < +\infty$; 3) $3 < x < 4$; 4) $-3 < x < -1$, $1 < x < +\infty$; 5) $-\infty < x < -4$, $-1 < x < 2$; 6) $-\infty < x < 0$, $1 < x < +\infty$. **699.** 1) $-3 < x < -1$, $2 < x < +\infty$; 2) $-1 < x < \frac{1}{2}$, $2 < x < +\infty$; 3) $-3 < x < -2$, $1 < x < +\infty$; 4) $-\infty < x < -3$, $2 < x < 4$; 5) $-\infty < x < -3$, $1 < x < 2$, $4 < x < +\infty$; 6) $-\infty < x < -3$, $-1 < x < 1$.

§ 88. Прогрессии

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

700. Обозначим через a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) члены арифметической прогрессии, через d — разность прогрессии, через S_n — сумму n первых членов прогрессии. Найдите:

1) d, n, если $a_1 = 10$, $a_n = 40$, $S_n = 275$;

2) a_1, a_9, если $d = 4$, $n = 9$, $S_9 = 162$;

3) a_1, d, S_{10}, если $a_3 + a_{11} = 44$, $a_2 + a_{11} = 41$;

4) a_1, d, если $a_1 + a_5 - a_3 = 10$, $a_1 + a_6 = 7$;

5) a_1, d, если $5a_1 + 10a_5 = 0$, $S_4 = 14$;

6) a_1, d, n, если $a_n = 55$, $a_2 + a_5 = 32{,}5$, $S_{15} = 412{,}5$;

7) a_1, d, если $a_1 + a_2 = 7$, $a_1 \cdot a_2 = 10$;
8) a_1, d, если $a_1 + a_2 + a_3 = 15$, $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$;
9) a_1, d, если $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 \cdot a_5 = 28$;
10) a_1, d, если $a_3 + a_7 = 4$, $a_2 + a_{14} = -8$;
11) d, S, если $a_1 = 3$, $a_n = 63$, $n = 16$;
12) a_{13}, S_{13}, если $a_1 = 7$, $d = 4$, $n = 13$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

701. Обозначим через b_i ($i = 12, \ldots, n$) члены геометрической прогрессии, через q — знаменатель прогрессии, через S_n — сумму n первых членов прогрессии. Найдите:
1) q, n, если $b_1 = 2$, $b_6 = 64$;
2) S_8, если $b_2 + b_4 = 10$, $b_3 + b_5 = 20$;
3) b_1, b_n, если $q = 2$, $n = 7$, $S = 635$;
4) b_1, S_n, если $b_n = 128$, $q = 2$, $n = 7$;
5) b_1, q, если $b_2 + b_5 - b_4 = 10$, $b_3 + b_6 - b_5 = 20$;
6) b_1, q, n, если $b_7 - b_5 = 48$, $b_6 + b_5 = 48$, $S_n = 1023$;
7) b_1, q, n, если $b_6 - b_4 = 216$, $b_3 - b_1 = 8$, $S_n = 40$;
8) S_9, если $b_1 + b_3 = 15$, $b_2 + b_4 = 30$;
9) S_n, если $b_1 = 8$, $q = 1/2$, $n = 5$.

702. 1) Первые члены арифметической и геометрической прогрессий равны 3. Второй член арифметической прогрессии больше второго члена геометрической на 6; третьи члены прогрессий равны. Найдите эти прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны.

2) Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 30. Если от первого члена отнять 5, от второго 4, а третий член оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти прогрессии.

3) Три положительных числа, дающие в сумме 21, составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4) Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от меньшего из них отнять 1, а от большего 19, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

ОТВЕТЫ

700. 1) $d = 3$, $n = 11$; 2) $a_1 = 2$, $a_9 = 34$; 3) $a_1 = 4$, $d = 3$, $S_{10} = 175$; 4) $a_1 = 36$, $d = -13$; 5) $a_1 = 8$, $d = -3$; 6) $a_1 = 10$, $d = 2{,}5$, $n = 19$; 7) $a_1 = 2$, $d = 3$; $a_1 = 5$, $d = -3$; 8) $a_1 = 2$, $d = 3$; $a_1 = 8$, $d = -3$; 9) $a_1 = 2$, $d = 3$; $a_1 = 14$, $d = -3$; 10) $a_1 = 10$, $d = -2$; 11) $d = 4$, $S = 528$; 12) $a_{13} = 55$, $S_{13} = 403$. **701.** 1) $q = 2$, $n = 6$; 2) $S_8 = 255$; 3) $b_1 = 5$, $b_n = 320$; 4) $b_1 = 2$, $S_n = 254$; 5) $b_1 = 1$, $q = 2$; 6) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 10$; 7) $b_1 = 1$, $q = 3$, $n = 4$; 8) $S_9 = 1533$; 9) $S_n = 15{,}5$. **702.** 1) 3, 15, 27, ... ; 3, 9, 27, ... ; 2) 8, 10, 12, ... ; 3, 6, 12, ... ; 3) 3, 7, 11; 4) 5, 15, 45.

ЧАСТЬ 5. СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Глава 17. Арифметика и алгебра

§ 89. Начальные сведения по арифметике

Деление с остатком. Зависимость между делимым a, делителем b, частным q и остатком r:

$$\frac{a}{b} = q, \qquad \text{остаток } r,$$

$$a = bq + r, \qquad 0 < r < b.$$

Делимое равно делителю, умноженному на частное плюс остаток.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ

Признак делимости чисел на 2 и на 5. На 2 и на 5 делятся числа, у которых последняя цифра выражает число, делящееся на 2 или на 5.

Признак делимости чисел на 3 и на 9. На 3 и на 9 делятся числа, у которых сумма цифр соответственно делится на 3 или на 9.

Признак делимости чисел на 4 и на 25. На 4 и на 25 делятся числа, которые оканчиваются двумя нулями или две последние цифры которых выражают число, делящееся соответственно на 4 или на 25.

Признак делимости чисел на 8 и на 125. На 8 и на 125 делятся числа, которые оканчиваются тремя нулями или у которых три последние цифры выражают число, делящееся соответственно на 8 или на 125.

Признак делимости чисел на 7, 11 и на 13. На 7, 11 и на 13 делятся числа, у которых разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами (или наоборот), делится соответственно на 7, 11 или на 13.

Признак делимости чисел на 6. На 6 делятся числа, которые делятся на 2 и на 3.

Числа простые и составные. Числа, делящиеся только на единицу и сами на себя, называются ***простыми***. Числа, которые делятся еще и на другие числа, называются ***составными***.

Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам, оно занимает особое положение.

Общий наибольший делитель и общее наименьшее кратное. ***Общим наибольшим делителем*** нескольких чисел называется наибольшее число, на которое делятся все данные числа без остатка.

Общим наименьшим кратным нескольких чисел называется наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел без остатка.

Основное свойство дроби. Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель ее умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

§ 90. Периодические десятичные дроби

Если обыкновенная несократимая дробь обращается в бесконечную десятичную дробь, то последняя будет обязательно периодической.

Если у знаменателя дроби отсутствуют множители 2 и 5, то дробь будет чисто периодической, если же знаменатель содержит множители 2 или 5, дробь будет смешанной периодической.

Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно записать числителем ее период, а знаменателем — число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде.

Например:

$$3,(05) = 3\frac{5}{99}; \qquad 0,(063) = \frac{63}{999} = \frac{7}{111}.$$

Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, нужно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а знаменателем написать число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде, и со столькими нулями на конце, сколько цифр между запятой и периодом.

Например,

$$0,3(51) = \frac{351-3}{990} = \frac{348}{990} = \frac{58}{165};$$

$$4,7(8) = 4\frac{78-7}{90} = 4\frac{71}{90}.$$

§ 91. Проценты

Процентом числа называется сотая часть этого числа.

Нахождение процентов заданного числа: $p\%$ числа a равны $a \cdot p/100$.

Чтобы найти несколько процентов данного числа a, достаточно данное число разделить на 100 и умножить результат на число процентов p.

Нахождение числа по данной величине его процентов. Если $p\%$ некоторого числа составляет число a, то все число равно $a \cdot 100/p$.

Чтобы найти число по данной величине его процентов p, надо умножить данное число a на число процентов p и результат уменьшить в 100 раз.

Нахождение процентного отношения двух чисел. Процентное отношение числа a к числу b вычисляется по формуле $(a/b) \cdot 100$.

Чтобы вычислить процентное отношение числа a к числу b, нужно найти отношение a к b и умножить его на 100.

§ 92. Пропорции

Пропорцией называется равенство двух отношений

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Основное свойство пропорции. Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:

$$ad = bc.$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОПОРЦИИ

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \qquad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d};$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}; \qquad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c};$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}; \qquad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Свойство ряда равных отношений. Если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{a_1}{b_1},$$

т. е. если несколько отношений равны друг другу, то сумма всех предыдущих их членов так относится к сумме всех последующих, как каждый предыдущий к своему последующему.

Пропорциональная зависимость величины. ***Прямая*** пропорциональная зависимость между переменными x и y выражается формулой

$$y = kx,$$

и ***обратная*** пропорциональная зависимость между ними выражается формулой

$$y = \frac{k}{x},$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Пропорциональное деление. Чтобы разделить число на части, прямо пропорциональные нескольким данным числам, нужно разделить это число на сумму этих чисел и частное умножить на каждое из них.

♦ ПРИМЕР. Разделить число 120 в отношении 1 : 2 : 3.

РЕШЕНИЕ. Находим сумму частей $1 + 2 + 3 = 6$. На одну часть приходится $120 : 6 = 20$. Тогда искомые числа будут равны: $20 \cdot 1 = 20$; $20 \cdot 2 = 40$; $20 \cdot 3 = 60$. Проверка: $20 + 40 + 60 = 120$.

§ 93. Формулы сокращенного умножения

Произведение суммы двух чисел на их разность. Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Квадрат суммы и разности двух чисел. Квадрат суммы (разности) двух чисел равен квадрату первого числа, плюс (минус) удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Куб суммы и разности двух чисел. Куб суммы (разности) двух чисел равен кубу первого числа плюс (минус) утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс (минус) куб второго числа:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Сумма и разность кубов двух чисел. Сумма (разность) кубов двух чисел равна произведению суммы (разности) оснований этих чисел на неполный квадрат их разности (суммы):

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2).$$

Разложение многочленов на множители. К основным способам разложения на множители относятся:

1) вынесение за скобки общего множителя;
2) способ группировки;
3) по формулам сокращенного умножения.

§ 94. Действия со степенями и корнями

Степень произведения:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot \ldots)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot \ldots .$$

Степень частного (дроби):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad b \neq 0.$$

Умножение степеней с одинаковыми показателями:

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot \ldots = (a \cdot b \cdot c \cdot \ldots)^n.$$

Деление степеней с одинаковыми показателями:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \qquad b \neq 0.$$

Умножение степеней с одинаковыми основаниями:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad a > 0.$$

Деление степеней с одинаковыми основаниями:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a > 0.$$

Возведение степени в степень:

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad a > 0.$$

Корень из произведения:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Корень из частного (дроби):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad a > 0, \qquad b > 0.$$

Умножение корней с одинаковыми показателями:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}, \qquad a > 0, \qquad b > 0, \qquad c > 0.$$

Деление корней с одинаковыми показателями:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \qquad a > 0, \qquad b > 0.$$

Возведение корня в степень:

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}, \qquad a > 0.$$

Извлечение корня из степени:

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p, \qquad a > 0.$$

Извлечение корня из корня:

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}, \qquad a > 0.$$

Первая, нулевая, отрицательная и дробная степени. Всякое число, не равное 0, в нулевой степени равно 1:

$$a^0 = 1;$$

$$a^1 = a;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a \neq 0, \qquad n > 0;$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \qquad a \geqslant 0;$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a \geqslant 0;$$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \qquad a > 0.$$

§ 95. Комплексные числа в алгебраической форме

Комплексными числами называются числа вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, i — мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$.

Степени мнимой единицы:

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i,$$
$$i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i, \qquad k \in Z^{1)}.$$

Два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называются ***равными***, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Сумма (разность) двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ находится по формуле

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

Произведение двух комплексных чисел $z = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ находится по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

Частное двух комплексных чисел находится по формуле

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Действия над комплексными числами можно производить по правилам действий над алгебраическими двучленами, принимая во внимание, что $i^2 = -1$.

Любое действительное число a содержится в множестве комплексных чисел:

$$a = a + 0 \cdot i; \qquad 0 = 0 + 0 \cdot i; \qquad 1 = 1 + 0 \cdot i; \qquad i = 0 + 1 \cdot i.$$

При $a = 0$ комплексное число обращается в чисто мнимое число bi.

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются ***комплексно сопряженными*** и обозначаются

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Комплексные числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются ***противоположными***.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

---

1) Здесь и далее через Z обозначено множество целых чисел.

§ 96. Линейные уравнения и системы линейных уравнений

Тождество и уравнение. В математике имеют место два вида равенств: тождества и уравнения.

Равенство, справедливое при любых допустимых числовых значениях входящих в него букв, называется ***тождеством.*** Например, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — это равенство справедливо при любых числовых значениях a и b.

Равенство, справедливое при определенных допустимых числовых значениях входящих в него букв, называется ***уравнением.*** Например, $2x - 8 = 2$ — это равенство справедливо только при $x = 5$.

Корнем или ***решением*** уравнения называется значение переменной (неизвестного), при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

Уравнения называются ***равносильными***, если все корни одного уравнения являются корнями другого и наоборот.

Решение уравнений основано на двух теоремах.

■ **ТЕОРЕМА I**

Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.

■ **ТЕОРЕМА II**

Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится уравнение, равносильное данному.

Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — действительные числа.

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (НЕИЗВЕСТНЫМ)

Путь решения	Уравнение $\frac{3x-1}{2} - \frac{5x-2}{3} = 2 - 2x$
1. Приводим уравнение к целому виду	$3(3x - 1) - 2(5x - 2) = 6\,(2 - 2x)$
2. Раскрываем скобки	$9x - 3 - 10x + 4 = 12 - 12x$
3. Члены, содержащие переменную (неизвестное), переносим в левую часть, свободные члены — в правую часть	$9x - 10x + 12x = 12 + 3 - 4$

Путь решения	Уравнение $\frac{3x-1}{2} - \frac{5x-2}{3} = 2 - 2x$
4. Выполняем приведение подобных членов	$11x = 11$
5. Делим обе части уравнения на коэффициент при переменной	$x = \frac{11}{11} = 1$ Корень уравнения: $x = 1$
6. Для проверки подставляем в исходное уравнение корень $x = 1$. Имеем тождество	$\frac{3 \cdot 1 - 1}{2} - \frac{5 \cdot 1 - 2}{3} = 2 - 2 \cdot 1;$ $0 = 0$

Система двух линейных уравнений с двумя переменными. Любое линейное уравнение легко привести к нормальному виду $ax + by = c$.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными путем исключения одной из переменных приводит систему к одному линейному уравнению с одной переменной.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ СПОСОБОМ УРАВНИВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Путь решения	Система $\begin{cases} 7x - 3y = -1, \\ 4x - 5y = -17 \end{cases}$
1. Для уравнивания коэффициентов умножаем каждое уравнение на такой множитель, чтобы коэффициенты при одной из переменных были равны	Первое уравнение умножаем на 5, второе — на (−3). Тогда уравниваются коэффициенты при y: $\begin{cases} 7x - 3y = -1, & \cdot 5 \\ 4x - 5y = -17 & \cdot (-3) \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 35x - 15y = -5, \\ -12x + 15y = 51 \end{cases}$
2. Складываем (или вычитаем) почленно оба уравнения для исключения одной из переменных	Сложив уравнения, исключаем y: $+\begin{array}{r} 35x - 15y = -5, \\ -12x + 15y = 51 \\ \hline 23x \quad\quad = 46 \end{array}$
3. Решаем полученное уравнение с одной переменной	Находим корень x: $x = \frac{46}{23} = 2$

Путь решения	Система $\begin{cases} 7x - 3y = -1, \\ 4x - 5y = -17 \end{cases}$
4. Подставляем найденное значение переменной в одно из уравнений и находим значение второй переменной	Подставив $x = 2$ в первое уравнение, находим y: $7 \cdot 2 - 3y = -1;$ $3y = 14 + 1 = 15;$ $y = 5$
5. Подстановкой найденных корней в исходную систему проверяем правильность ответа	Ответ: (2; 5)

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ СПОСОБОМ ПОДСТАНОВКИ

Путь решения	Система $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$
1. Решаем одно из двух уравнений относительно одной из переменных, рассматривая вторую переменную как известное	Решаем первое уравнение относительно y: $y = 3x - 5.$ Это выражение будем называть *подстановкой*
2. Подставляем найденное значение переменной из первого уравнения во второе и тем самым исключаем из него эту переменную	$5x + 2(3x - 5) = 23$
3. Решаем полученное уравнение с одной переменной	$5x + 6x - 10 = 23;$ $5x + 6x = 23 + 10;$ $11x = 33; \quad x = \frac{33}{11} = 3$
4. Подставляем найденное значение переменной в подстановку	$y = 3 \cdot 3 - 5 = 4$ Ответ: (3; 4)
5. Подстановкой найденных корней в исходную систему проверяем правильность решения	$\begin{cases} 3 \cdot 3 - 4 = 5, \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 23 \end{cases}$

§ 97. Краткие сведения об определителях. Решение системы линейных уравнений по формулам Крамера

Определителем второго порядка, составленным из чисел a_1, b_1, a_2, b_2, называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются ***элементами*** определителя, причем элементы a_1 и b_2 образуют ***главную диагональ***, а элементы a_2 и b_1 — ***побочную диагональ***.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеет единственное решение, которое находится по ***формулам Крамера***:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Если определитель системы $\Delta = 0$, то система является либо ***несовместной***, т. е. не имеет решения (когда $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$), либо ***неопределенной*** (когда $\Delta_x = \Delta_y = 0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Условие несовместности системы можно записать в виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2},$$

а условие неопределенности — в виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Решение системы трех линейных уравнений с тремя переменными. Определителем третьего порядка, составленным из чисел a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, называется число Δ, определяемое равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 \cdot (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 \cdot (a_2b_3 - a_3b_2).$$

Эта формула называется разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы $\Delta \neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta = 0$, то система является либо неопределенной, либо несовместной. В том случае, когда система однородная, т. е. имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases}$$

и $\Delta \neq 0$, она имеет единственное решение: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

§ 98. Решение системы трех линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса

Решение системы линейных уравнений путем сведения ее к треугольной системе уравнений называется ***методом Гаусса***.

К треугольной системе можно свести данную систему разными способами, последовательно исключая переменные. Рассмотрим один из таких способов с помощью примера:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -3, & (1)\\ 2x - y + 3z = 21, & (2)\\ x + y - z = -5. & (3)\end{cases}$$

1. Из данной системы составим уравнение, не содержащее x. Для этого уравнение (1) умножим на 2, а уравнение (2) на (-3) и, сложив эти уравнения, получим уравнение, не содержащее x:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -3, & \cdot 2\\ 2x - y + 3z = 21 & \cdot(-3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y - 2z = -6\\ -6x + 3y - 9z = -63\end{cases} \quad \underline{\hphantom{xx}} \quad 7y - 11z = -69.$$

2. Составим второе уравнение, не содержащее x. Для этого уравнение (3) умножим на (-2) и сложим полученное уравнение с уравнением (2):

$$\frac{x + y - z = -5 \quad |\cdot(-2)}{-2x - 2y + 2z = 10} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 10,\\ 2x - y + 3z = 21\end{cases} \quad -3y + 5z = 31.$$

3. Из системы

$$\begin{cases} 7y - 11z = -69,\\ -3y + 5z = 31\end{cases}$$

исключим y:

$$\begin{cases} 7y - 11z = -69 & \cdot 3\\ -3y + 5z = 31 & \cdot 7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21y - 33z = -207,\\ -21y + 35z = 217\end{cases} \quad 2z = 10$$

4. Получили треугольную систему

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -3,\\ -3y + 5z = 31,\\ 2z = 10,\end{cases}$$

из которой следует $z = 5$; $y = -2$; $x = 2$.

Ответ: $(2; -2; 5)$.

§ 99. Квадратные уравнения и квадратные неравенства

Неполные квадратные уравнения могут быть трех видов:

1) $ax^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 0;$
2) $ax^2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a};$
3) $ax^2 + bx = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = -b/a.$

Квадратные уравнения. Квадратное уравнение неприведенного (общего) вида

$$ax^2 + bx + c = 0$$

решается по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где $b^2 - 4ac = D$ — ***дискриминант*** квадратного уравнения.

При $D < 0$ уравнение не имеет действительных корней; при $D = 0$ имеет два равных корня и при $D > 0$ имеет два различных корня.

При $b = 2k$ формула примет вид

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Квадратное уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0$$

называется ***приведенным*** и решается по формуле

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Свойства корней квадратного уравнения (теорема Виета). Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Для приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$ имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Разложение квадратного трехчлена на множители. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Квадратные неравенства. Квадратные неравенства легко решаются ***методом промежутков***.

♦ ПРИМЕР 1

Решить неравенство $x^2 + x - 6 > 0$.

РЕШЕНИЕ. Находим корни квадратного трехчлена $x^2 + x - 6 = 0$: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Отложив корни на числовой оси, получим промежутки: $x < -3$ и $x > 2$ (рис. 1). Ответ: $-\infty < x < -3$, $2 < x < +\infty$.

♦ ПРИМЕР 2

Решить неравенство $x^2 + x - 12 < 0$.

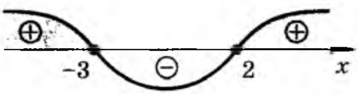

Рис. 1

Рис. 2

РЕШЕНИЕ. Трехчлен $x^2 + x - 12 = 0$ имеет корни $x_1 = -4$, $x_2 = 3$. Отложив корни на числовой оси, получим промежутки $-4 < x < 3$ (рис. 2). Ответ: $-4 < x < 3$.

§ 100. Прогрессии

Арифметическая прогрессия. ***Арифметической прогрессией*** называется числовая последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным числом, называемым разностью прогрессии:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ \dots .$$

Приняты следующие обозначения:

$\div$ — сокращенное обозначение арифметической прогрессии;
n — число членов прогрессии;
a_1 — первый член прогрессии;
a_n — n-й член прогрессии;
d — разность прогрессии;

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ — формула для вычисления n-го члена прогрессии;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — формула для вычисления суммы n первых членов прогрессии;

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ — формула для вычисления ***среднего арифметического*** двух чисел.

Геометрическая прогрессия. ***Геометрической прогрессией*** называется числовая последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же постоянное число, называемое знаменателем прогрессии:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3,\ \dots .$$

Приняты следующие обозначения:

$\div\div$ — сокращенное обозначение геометрической прогрессии;
n — число членов прогрессии;
b_1 — первый член прогрессии;
b_n — n-й член прогрессии;
q — знаменатель прогрессии;

$b_n = b_1q^{n-1}$ — формула для вычисления n-го члена прогрессии;

$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}$ или $S_n = \frac{b_1 - b_nq^n}{1 - q}$ — формулы для вычисления суммы n первых членов прогрессии;

$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ — формула для вычисления ***среднего геометрического*** (пропорционального) двух чисел.

§ 101. Иррациональные уравнения и иррациональные неравенства

Уравнение, содержащее переменную под знаком корня, называется ***иррациональным***.

Решение иррационального уравнения основано на преобразовании его к рациональному уравнению, что достигается возведением обеих его частей в одну и ту же степень (иногда несколько раз).

При возведении обеих частей иррационального уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но могут появиться и ***посторонние*** корни. Чтобы выявить посторонние корни, найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение и посторонние корни отбрасывают.

Исходное уравнение равносильно смешанной системе, состоящей из уравнения-следствия и ограничений, определяемых областью допустимых значений переменной. В этом случае посторонние корни не будут входить в область допустимых значений переменной и проверять их подстановкой в исходное уравнение не требуется.

При возведении обеих частей иррационального уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному.

Иррациональные неравенства. Решение иррационального неравенства с одной переменной сводится к решению равносильной ему системы рациональных неравенств или совокупности систем рациональных неравенств.

Эти системы решаются при наложении ограничений на переменную и возведении обеих частей неравенства в одну и ту же степень.

Основные виды иррациональных неравенств и способы их решения

$$\sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) < \varphi^{2k}(x); \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > \varphi^{2k}(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > \varphi(x). \end{cases}$$

§ 102. Логарифмы. Логарифмические неравенства

Логарифмом числа N ($N > 0$) по данному основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число N:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N.$$

Основное логарифмическое тождество

$$\boxed{a^{\log_a N} = N.}$$

Свойства логарифмов ($a > 0$, $a \neq 1$)

I. Всякое положительное число N по любому основанию имеет единственный логарифм.

II. При любом основании отрицательные числа не имеют логарифмов.

III. При любом основании логарифм единицы равен нулю.

IV. Логарифм самого основания равен единице.

V. При основании, большем единицы, большему числу соответствует и больший логарифм.

VI. Логарифмы чисел, больших единицы (при $a > 1$), положительны.

VII. Логарифмы чисел, меньших единицы (при $a > 1$), отрицательны.

VIII. При $0 < a < 1$ большему числу соответствует меньший логарифм, при этом логарифмы чисел, меньших единицы, положительны, а логарифмы чисел, больших единицы, отрицательны.

Алгебраические операции над логарифмами ($a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$)

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N,$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$$

$$\log_a M^n = n\log_a M,$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M.$$

Десятичные логарифмы. Логарифм по основанию 10 называется десятичным ($\log_{10} M = \lg M$). По определению логарифма имеем:

$\lg 1 = 0,$	$\lg 0{,}1 = -1,$
$\lg 10 = 1,$	$\lg 0{,}01 = -2,$
$\lg 100 = 2,$	$\lg 0{,}001 = -3,$
$\lg 1000 = 3,$	$\lg 0{,}0001 = -4,$
....	....

Формула перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

Зависимость между основаниями a и b выражается формулой

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a.$$

В логарифмических преобразованиях используется формула

$$\log_{a^n} = \frac{1}{n}\log_a M.$$

Логарифмические неравенства. Неравенства вида $\log_a x > c$ и вида $\log_a x < c$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) называются простейшими логарифмическими неравенствами.

Основные случаи решения логарифмических неравенств

I. $$\log_a x > c \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x > a^c, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < x < a^c. \end{cases} \end{array} \right.$$

II. $$\log_a x < c \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ 0 < x < a^c, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > a^c. \end{cases} \end{array} \right.$$

III. $$\log_{f(x)} \varphi(x) > \log_{f(x)} \psi_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ \psi(x) > 0, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > \psi(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < \psi(x). \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

♦ ПРИМЕРЫ

$\log_2 x > 3 \Leftrightarrow x > 2^3$;

$\log_{1/2} x > 3 \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{2}\right)^3$;

$\log_2 x < 3 \Leftrightarrow x < 2^3$;

$\log_{1/2} x < 3 \Leftrightarrow x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

§ 103. Показательные неравенства

Неравенства вида $a^x > c$, $a^x < c$, $f(x)^{\varphi_1(x)} > f(x)^{\varphi_2(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, называются ***простейшими показательными неравенствами.***

При решении показательных неравенств используются следующие равносильные преобразования:

1) $$a^x > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1, \\ x > \log_a c, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x < \log_a c; \end{cases}\end{array}\right.$$

2) $$a^x > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1, \\ x < \log_a c, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > \log_a c; \end{cases}\end{array}\right.$$

3) $$f(x)^{\varphi_1(x)} > f(x)^{\varphi_2(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi_1(x) < \varphi_2(x); \end{cases}\end{array}\right.$$

4) $$\begin{cases} a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \big(f(x) < \varphi(x)\big);$$

5) $$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \big(f(x) > \varphi(x)\big);$$

6) $$\begin{cases} a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \big(f(x) > \varphi(x)\big);$$

7) $$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \big(f(x) < \varphi(x)\big).$$

§ 104. Элементы комбинаторики

Размещения. ***Размещениями*** из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)].$$

Перестановки. ***Перестановками*** из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов. Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n.

Перестановки представляют собой частный случай размещений из n элементов по n в каждом, т. е.

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

или

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ обозначают символом $n!$ (n-факториал), причем полагают $0! = 1$, $1! = 1$.

Предыдущую формулу можно записать в виде $P_n = n!$. Тогда формулу размещений можно записать в виде

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

При решении задач используется формула $A_n^{m+1} = (n-m)\, A_n^m$.

Сочетания. ***Сочетаниями*** из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m},$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

или

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)]}{m!}.$$

При решении задач используются формулы

$$C_n^m = C_n^{n-m} \qquad (0 < m \leqslant n,\ C_n^n = 1,\ C_n^0 = 1),$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Глава 18. Тригонометрия

§ 105. Основные тригонометрические тождества

Окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 1$ называется ***единичной окружностью***. За начало отсчета дуг принимается точка $A(1; 0)$.

Каждому действительному числу α на единичной окружности соответствует точка M_α — конец дуги AM_α, для которой дуга AM_α имеет величину α (α выражается в радианах — в частях числа π). Такая единичная окружность называется числовой единичной окружностью (рис. 3). Длина единичной окружности равна 2π. Точка M_α, перемещаясь по окружности, имеет переменные координаты $(x; y)$.

Абсцисса x точки M_α числовой единичной окружности называется ***косинусом*** числа α:

$$x = \cos\alpha,\ |\cos\alpha| \leqslant 1.$$

Ордината y точки M_α числовой единичной окружности называется ***синусом*** числа α:

$$y = \sin\alpha,\ |\sin\alpha| \leqslant 1.$$

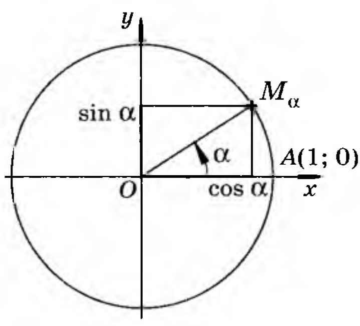

Рис. 3

Отношение синуса числа α к его косинусу называется ***тангенсом*** числа α:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Область определения тангенса — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Отношение косинуса числа α к его синусу называется ***котангенсом*** числа α:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Область определения котангенса — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$,

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\qquad$ $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

ЗНАКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (ПО ЧЕТВЕРТЯМ)

Четверть / Функция	I $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	II $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	III $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IV $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	–	+	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	–	+	–

ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ

Данная функция	Искомая функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

$\alpha°$	0°	30°		45°		60°		90°	180°	270°	360°
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	0,5236	$\frac{\pi}{4}$	0,7854	$\frac{\pi}{3}$	1,0472	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	0,5000	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7071	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,8660	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,8660	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7071	$\frac{1}{2}$	0,5000	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,5773	1	1,0000	$\sqrt{3}$	1,7320	не существует	0	не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1,7320	1	1,0000	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,5773	0	не существует	0	не существует

§ 106. Формулы приведения

Применяя формулы приведения, рекомендуется пользоваться следующими правилами.

I. Если α откладывается от оси Ox, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента $(-\alpha)$, $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, не изменяется. Если же α откладывается от оси Oy, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента $\pi/2 \pm \alpha$, $3\pi/ \pm \alpha$, заменяется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот).

II. Знак, с которым нужно брать тригонометрическую функцию в правой части, находится по знаку левой части в предположении, что $0 < \alpha < \pi/2$.

§ 107. Обратные тригонометрические функции. Простейшие тригонометрические уравнения

Функция $y = \arcsin x$ есть дуга (угол) из промежутка

$$-\pi/2 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2,$$

синус которой равен x, т. е. $\sin y = x$.

Функция $y = \arccos x$ есть дуга (угол) из промежутка

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi,$$

косинус которой равен x, т. е. $\cos y = x$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ есть дуга (угол) из промежутка

$$-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2,$$

тангенс которого равен x, т. е. $\operatorname{tg} y = x$.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ есть дуга (угол) из промежутка

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi,$$

котангенс которого равен x, т. е. $\operatorname{ctg} y = x$.

Запишем приведенные определения в виде таблицы.

Функция	Область определения	Область изменения
$y = \operatorname{arsin} x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$-\pi/2 \leqslant \operatorname{arsin} x \leqslant \pi/2$
$y = \arccos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$
$y = \operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$

Простейшие тригонометрические уравнения. Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\operatorname{tg} x = m$, $\operatorname{ctg} x = m$.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение — значит найти множество значений аргумента (дуг или углов), при которых тригонометрическая функция принимает данное значение. В частности,

$$\sin x = m \quad \rightarrow \quad x = \begin{cases} \arcsin m + 2\pi k,^{1)} \\ \pi - \arcsin m + 2\pi k, \end{cases}$$

или

$$x = \begin{cases} \arcsin m + 2\pi k, \\ -\arcsin m + \pi(2k + 1). \end{cases}$$

Решение можно записать в виде одной формулы

$$x = (-1)^k \arcsin m + \pi k.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \cos x &= m \quad \Rightarrow \quad x = \pm \arccos m + 2\pi k; \\ \operatorname{tg} x &= m \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} m + \pi k; \\ \operatorname{ctg} x &= m \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} m + \pi k. \end{aligned}$$

[1] Здесь и в дальнейшем $k \in \mathbf{Z}$.

♦ ПРИМЕРЫ

$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k;$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \pi/2 + 2\pi k;$

$\sin x = 1/2 \Rightarrow x = (-1)^k \pi/6 + \pi k;$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pm\pi + 2\pi k$ или $x = \pi(2k + 1);$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k;$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k;$

$\mathrm{tg}\, x = 0 \Rightarrow x = \pi k;$

$\mathrm{ctg}\, x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k;$

$\mathrm{ctg}\, x = -1 \Rightarrow x = 3\pi/4 + \pi k.$

§ 108. Тригонометрические функции алгебраической суммы двух аргументов. Формулы удвоенного и половинного аргументов

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УДВОЕННОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}; \qquad \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}};$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}{1+\mathrm{tg}^2\,(\alpha/2)}; \qquad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,(\alpha/2)}{1+\mathrm{tg}^2\,(\alpha/2)};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}{1-\mathrm{tg}^2\,(\alpha/2)}; \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,(\alpha/2)}{2\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}.$$

§ 109. Преобразование произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму и алгебраической суммы в произведение

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ СУММУ

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2);$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2);$$

$$1+\sin\alpha = 2\cos^2(\pi/4-\alpha/2);$$

$$1-\sin\alpha = 2\sin^2(\pi/4-\alpha/2).$$

УСЛОВИЯ РАВЕНСТВА ОДНОИМЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$(\sin x = \sin y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = (2k+1)\pi, \\ x - y = 2\pi k; \end{array}\right.$$

$$(\cos x = \cos y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 2\pi k, \\ x - y = 2\pi k; \end{array}\right.$$

$$(\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \pi/2 + \pi k,\ y \neq \pi/2 + \pi k, \\ x - y = \pi k. \end{array}\right.$$

Глава 19. Геометрия

§ 110. Площади многоугольников. Окружность и круг

Площадь квадрата: $S = a^2$, $S = d^2/2$, где a — сторона квадрата, d — диагональ квадрата.

Площадь прямоугольника: $S = a \cdot h$, где a — основание, h — высота.

Площадь параллелограмма: $S = ah$, $S = ab \sin\varphi$, где a и b — стороны параллелограмма, h — его высота, φ — острый угол между сторонами.

Площадь ромба: $S = ah$, $S = a^2\sin\varphi$, $S = d_1 d_2/2$, где a — сторона ромба, h — его высота, d_1 и d_2 — диагонали ромба, φ — острый угол между его сторонами.

Треугольник

Площадь треугольника: $S = ah_a/2$, $S = bc \sin(A/2)$, где a, b, c — стороны треугольника, A — угол, противолежащий стороне a, или

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = (a + b + c)/2$ (формула Герона).

Прямоугольный треугольник. В прямоугольном треугольнике $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора), $S = ab/2$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

В любом треугольнике справедлива зависимость между его сторонами и углами, выражаемая соответствующими теоремами.

■ ТЕОРЕМА СИНУСОВ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin B} = \frac{a}{\sin C},$$

здесь A, B и C — углы, противолежащие одноименным сторонам a, b и c.

■ ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Площадь трапеции: $S = (a + b/2)\cdot h$, где a и b — основания трапеции, h — ее высота.

Окружность и круг

Длина окружности равна $C = 2\pi R$.
Длина дуги, содержащей $\alpha°$, составляет $l = \pi R\alpha/180$.
Площадь круга равна $S = \pi R^2$.
Площадь сектора с углом $\alpha°$ равна

$$S_{\text{сект}} = \pi R^2\alpha/360.$$

Правильные многоугольники. Выражение стороны a_n правильного вписанного многоугольника через радиус описанной окружности R и тригонометрическую функцию центрального угла:

$$a_n = 2R\sin(180/n).$$

Частные случаи: $a_3 = R\sqrt{3}$, $a_4 = R\sqrt{2}$, $a_6 = R$.

Площадь правильного вписанного многоугольника вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{360}{n},$$

где n — число сторон многоугольника, $R = a_n/2\sin(180/n)$ — радиус описанной окружности.

Выражение стороны b_n правильного описанного многоугольника через радиус вписанной окружности r и тригонометрическую функцию центрального угла:

$$b_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}.$$

Частные случаи: $b_3 = 2r\sqrt{3}$, $b_4 = 2r$, $b_6 = 2r\sqrt{3}/3$.

Площадь правильного описанного многоугольника вычисляется по формуле

$$S = r^2 n \operatorname{tg}(180/n),$$

где n — число сторон многоугольника, $r = \dfrac{b_n}{2\operatorname{tg}(180/n)}$ — радиус вписанной окружности.

§ 111. Объемы и площади поверхностей геометрических тел

Наклонная призма. Объем наклонной призмы равен

$$v = S_{\text{п.с}} \cdot a,$$

где $S_{\text{п.с}}$ — площадь перпендикулярного сечения, a — боковое ребро.

Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{п.с}} \cdot a,$$

где $P_{\text{п.с}}$ — периметр перпендикулярного сечения наклонной призмы, a — боковое ребро.

Площадь полной поверхности наклонной призмы равна

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2\,S_{\text{основ}},$$

где $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности наклонной призмы, $S_{\text{основ}}$ — площадь ее основания.

Прямая призма. Объем прямой призмы равен

$$v = S_{\text{основ}} \cdot a,$$

где $S_{\text{основ}}$ — площадь основания, a — боковое ребро.

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{основ}} \cdot a,$$

где $P_{\text{основ}}$ — периметр основания прямой призмы, a — боковое ребро.

Площадь полной поверхности прямой призмы равна

$$S = S_{\text{бок}} + 2\,S_{\text{основ}},$$

где $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности прямой призмы, $S_{\text{основ}}$ — площадь основания.

Прямоугольный параллелепипед. Объем прямоугольного параллелепипеда равен

$$v = abc,$$

где a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда.

Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда равна

$$S_{бок} = 2c\,(a + b),$$

где a и b — стороны основания, c — боковое ребро.

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна

$$S_{полн} = 2(ab + bc + ac),$$

где a, b, c — его измерения.

Куб. Объем куба равен $v = a^3$, площади его боковой поверхности и полная равны соответственно $S_{бок} = 4a^2$, $S_{полн} = 6a^2$, где a — ребро куба.

Пирамида. Объем пирамиды равен $v = \frac{1}{3} S_{основ} \cdot H$,

где $S_{основ}$ — площадь основания пирамиды, H — ее высота.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней.

Площадь полной поверхности пирамиды

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{основ},$$

где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности пирамиды, $S_{основ}$ — площадь основания.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{основ} \cdot l,$$

где $P_{основ}$ — периметр основания правильной пирамиды, l — ее апофема.

Усеченная пирамида. Обозначим через S_1 и S_2 площади оснований усеченной пирамиды, через H — ее высоту. Тогда объем усеченной пирамиды равен

$$v = \frac{H}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right).$$

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней.

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды равна

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2.$$

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна

$$S_{\text{бок}} = \Big((P_1 + P_2)/2\Big) \cdot l,$$

где P_1 и P_2 — периметры оснований, а l — ее апофема.

Цилиндр. Обозначим через R радиус основания цилиндра, через H — высоту цилиндра. Тогда объем цилиндра равен

$$v = \pi R^2 H.$$

Площадь боковой поверхности цилиндра равна

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH.$$

Площадь полной поверхности цилиндра равна

$$S_{\text{полн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

Конус. Обозначим через R радиус основания конуса, через H — его высоту, L — образующую конуса. Тогда объем конуса равен

$$v = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Площадь боковой поверхности конуса равна

$$S_{\text{бок}} = \pi RL.$$

Площадь полной поверхности конуса равна

$$S_{\text{полн}} = \pi R\,(R + L).$$

Усеченный конус. Обозначим через R и r радиусы оснований усеченного конуса, через H — его высоту, через L — образующую. Тогда объем усеченного конуса равен

$$v = \frac{1}{3}\pi H\,(R^2 + Rr + r^2).$$

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна

$$S_{\text{бок}} = \pi L(R + r).$$

Площадь полной поверхности усеченного конуса равна

$$S_{\text{полн}} = \pi L(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Сфера и шар. Объем шара с радиусом R равен

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Площадь сферы (площадь поверхности шара) с радиусом R равна

$$S = 4\pi R^2.$$

Объем шарового сегмента равен

$$v = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right),$$

где R — радиус шара, H — высота шарового сегмента.

Объем шарового сектора равен

$$v = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где R — радиус шара, H — высота соответствующего шарового сегмента.

Глава 20. Элементы аналитической геометрии на плоскости

§ 112. Прямая на плоскости

Уравнение оси Ox: $y = 0$.

Уравнение прямой, параллельной оси Ox: $y = b$.

Уравнение оси Oy: $x = 0$.

Уравнение прямой, параллельной оси Oy: $x = a$.

Уравнение прямой, проходящей через начало координат, с угловым коэффициентом k: $y = kx$.

Угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox: $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между положительным направлением оси Ox и прямой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b — ординатой точки пересечения прямой с осью Oy: $y = kx + b$. Здесь $k = \operatorname{tg}\alpha$; если $\alpha = 0$, то $k = 0$, т. е. прямая параллельна оси Ox. При $\alpha = 90°$ угловой коэффициент k не существует, т. е. прямая, перпендикулярная оси Ox, не имеет углового коэффициента.

Уравнение прямой в отрезках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Здесь a — отрезок, отсекаемый прямой на оси Ox, b — отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1;\ y_1)$ в заданном направлении, определяемом угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha$:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Если угловой коэффициент k будет принимать различные числовые значения (кроме $k = \operatorname{tg} 90°$, когда k не существует), получим уравнение пучка прямых, проходящих через точку A.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки A и B:

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Общее уравнение прямой. Уравнение первой степени относительно переменных x и y, т. е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0,$$

при условии, что коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, называется общим уравнением прямой.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ $AX + BY + C = 0$

Значение коэффициентов	Вид уравнения	Положение прямой
$C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0$	$Ax + By = 0$ ($y = kx$)	Проходит через начало координат
$A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$	$By + C = 0$ ($y = b$)	Параллельна оси Ox
$B = 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0$	$Ax + C = 0$ ($x = a$)	Параллельна оси Oy
$A = C = 0,\ B \neq 0$	$By = 0$ ($y = 0$)	Совпадает с осью Ox (уравнение оси Ox)
$B = C = 0,\ A \neq 0$	$Ax = 0$ ($x = 0$)	Совпадает с осью Oy (уравнение оси Oy)

Пересечение двух прямых. Для вычисления координат точки пересечения прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ необходимо решить систему уравнений этих прямых.

Угол между двумя прямыми. Угол φ между двумя прямыми, заданными общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Условие параллельности двух прямых. Условие параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, записывается в виде

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие параллельности прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, имеет вид

$$k_2 = k_1.$$

Условие перпендикулярности двух прямых. Условие перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Условие перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, имеет вид

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

или

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Расстояние от данной точки до данной прямой. Расстояние d от точки $M(x_1; y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

§ 113. Кривые второго порядка

Окружность. Уравнение окружности с центром в начале координат и с радиусом r имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Уравнение окружности с центром в точке O_1 (a; b) и с радиусом r имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Уравнение окружности в общем виде записывается следующим образом:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0;$$

здесь A, B, C, D — постоянные коэффициенты, причем коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой.

Эллипс. ***Эллипсом*** называется множество точек $M(x; y)$ плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная $2a$, бóльшая, чем расстояние между фокусами $2c$, т. е. $MF_1 + MF_2 = 2a$ (рис. 4).

Уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b,$$

где a — длина большой полуоси, b — длина малой полуоси.

Зависимость между параметрами a, b и c выражается соотношением

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Эксцентриситетом эллипса e называется отношение фокусного расстояния $2c$ к большой оси $2a$:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

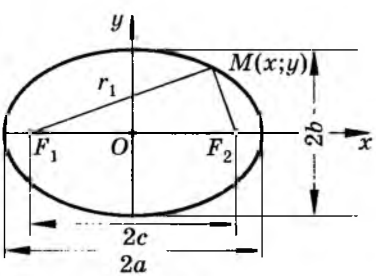

Рис. 4

Если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad a > b.$$

Оси симметрии эллипса совпадают с осями координат.

Гипербола. ***Гиперболой*** называется множество точек $M(x;\ y)$ плоскости, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная $2a$, меньшая расстояния между фокусами $2c$, т. е. $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a — длина действительной полуоси, b — длина мнимой полуоси (рис. 5).

Зависимость между параметрами a, b и c выражается соотношением

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния $2c$ к ее действительной оси $2a$:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

Гипербола имеет ***асимптоты*** с уравнениями

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Если действительная и мнимая оси равны ($a = b$), то гипербола называется ***равносторонней***. Ее уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

а уравнения асимптот

$$y = \pm x.$$

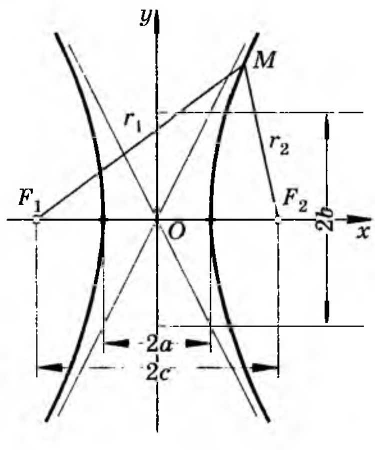

Рис. 5

Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то ее уравнение может быть записано в одном из следующих вариантов:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1,$$

а уравнения асимптот такой гиперболы имеют вид

$$y = \pm\frac{a}{b}x.$$

Уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Oy имеет вид

$$y^2 - x^2 = a^2.$$

Оси симметрии гиперболы совпадают с осями координат.

Парабола. ***Параболой*** называется множество точек плоскости $M(x; y)$, равноудаленных от данной точки F, называемой ***фокусом***, и от данной прямой, называемой ***директрисой***.

Парабола с вершиной в начале координат. Уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Ox и ветвями, направленными вправо, имеет вид

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$ (параметр параболы) — расстояние от фокуса до директрисы (рис. 6).

Уравнение директрисы такой параболы:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

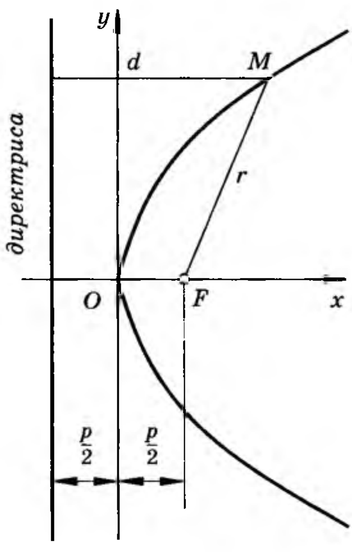

Рис. 6

Уравнение параболы с вершиной в начале координат с осью симметрии Ox и ветвями, направленными влево, имеет вид

$$y^2 = -2px \qquad (p > 0),$$

уравнение ее директрисы —

$$x = \frac{p}{2}.$$

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Oy и ветвями, направленными вверх, имеет вид

$$x^2 = 2py \qquad (p > 0),$$

уравнение ее директрисы —

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Oy и ветвями, направленными вниз, имеет вид

$$x^2 = -2py \qquad (p > 0),$$

уравнение ее директрисы —

$$y = \frac{p}{2}.$$

Парабола со смещенной вершиной. Уравнение параболы с вершиной в точке $(a; b)$, с осью симметрии, параллельной оси Ox, и ветвями, направленными вправо, имеет вид

$$(y - b)^2 = 2p(x - a).$$

Уравнение параболы с вершиной в точке $(a; b)$, с осью симметрии, параллельной оси Ox, и ветвями, направленными влево, имеет вид

$$(y - b)^2 = -2p(x - a).$$

Уравнение параболы с вершиной в точке $(a; b)$, с осью симметрии, параллельной оси Oy, и ветвями, направленными вверх, имеет вид

$$(x - a)^2 = 2p(y - b).$$

Уравнение параболы с вершиной в точке $(a; b)$, с осью симметрии, параллельной оси Oy, и ветвями, направленными вниз, имеет вид

$$(x - a)^2 = -2p(y - b).$$

Глава 21. Элементы дифференциального исчисления

§ 114. Производная

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основные правила дифференцирования. Обозначим через C постоянную, x — аргумент, u, v, w — функции от x, имеющие производные.

Производная алгебраической суммы функций:

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

Производная произведения двух функций:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Производная произведения постоянной на функцию:

$$(Cu)' = Cu'.$$

Производная частного (дроби):

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Частные случаи:

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'; \qquad \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}v'.$$

Сложная функция. Производная сложной функции. Если y есть функция от u: $y = f(u)$, где u, в свою очередь, есть функция от аргумента x: $u = \varphi(x)$, т. е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется ***сложной функцией*** от x (функцией от функции):

$$y = f[\varphi(x)].$$

Производная сложной функции равна ее производной по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

или

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x).$$

Формулы дифференцирования

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \qquad (\lg u)' = \frac{0{,}4343}{u}u'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u' \qquad (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' \qquad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' \qquad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

Производные тригонометрических функций

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

Производные обратных тригонометрических функций

$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1)$

$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1)$

$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

§ 115. Исследование функций с применением производной

Возрастание и убывание функции. Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной: если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает в этом промежутке; если же $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом промежутке.

Максимум и минимум функции. Функция $y = f(x)$ имеет максимум (минимум) при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство

$$f(a) > f(x) \qquad (f(a) < f(x)).$$

Функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет максимум, если:

1) $f'(a) = 0$;

2) $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с (+) на (−).

Функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет минимум, если:

1) $f'(a) = 0$;

2) $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с (−) на (+).

Точки максимума (max) и минимума (min) функции называются точками **экстремума**.

ПРАВИЛО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Приравнять ее нулю и найти действительные корни — ***критические точки*** x_0 функции $y = f(x)$ (при мнимых корнях экстремум функции не существует).

III. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

IV. Критическая точка x_0 есть точка максимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) > 0$ слева от точки x_0, от промежутка, в котором $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, т. е. производная меняет знак с (+) на (−) при переходе через точку x_0.

V. Критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$ слева от точки x_0, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$ справа от точки x_0, т. е. производная меняет знак с (−) на (+) при переходе через точку x_0.

Если в промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то точка x_0 экстремума не имеет.

VI. Вычислить значения функции в точках экстремума.

ПРАВИЛО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.

III. Найти вторую производную $f''(x)$.

IV. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то — минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.

Наименьшее и наибольшее значения функции. Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

I. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках.

II. Найти значения функции на концах промежутка.

III. Сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

Направление выпуклости графика функции. Кривая $y = f(x)$ называется ***выпуклой вниз*** в промежутке $a < x < b$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка, и наоборот, ***выпуклой вверх***, если она лежит ниже касательной в любой точке этого промежутка.

Выпуклость кривой $y = f(x)$ вниз или вверх характеризуется знаком ее второй производной: если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз; если $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх.

Точки перегиба. Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений, называется ***точкой перегиба***. Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв. Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

ПРАВИЛО НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$

I. Найти вторую производную $f''(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

I. Найти область определения функции.
II. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
III. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднений).
IV. Найти асимптоты графика функции.
V. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
VI. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

§ 116. Дифференциал функции. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

Дифференциал аргумента $\mathrm{d}x$ принимается равным приращению аргумента, т. е.

$$\mathrm{d}x = \Delta x,$$

а дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению производной функции на дифференциал аргумента, т. е.

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Из этого следует, что производная функции $y = f(x)$ есть отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента

$$f'(x) = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Пусть для функции $y = f(x)$ величина x получена непосредственным измерением или в результате приближенного вычисления. При нахождении величины x мы допускаем не зависящую от нас погрешность Δx.

Пусть x — приближенное значение аргумента, Δx — абсолютная погрешность величины x, $\Delta x/x$ — относительная погрешность величины x, а $(x + \Delta x)$ — истинное значение измеряемой величины (Δx может быть как положительным, так и отрицательным числом), тогда абсолютная погрешность функции равна

$$|\Delta y| = |f(x + \Delta x) - f(x)|.$$

При малых значениях Δx (близких к нулю) величину приращения Δy можно приближенно заменить дифференциалом $\mathrm{d}y$, т. е.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$$

Приближенное равенство $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ позволяет приближенно вычислять приращение функции $y = f(x)$.

Относительная погрешность ε величины y вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|.$$

Для вычисления приближенного числового значения функции применяется формула

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Из этой формулы легко могут быть получены формулы для нахождения приближенных числовых значений степеней, корней, обратных величин и другие.

Формула для вычисления приближенного числового значения степени:

$$(x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x.$$

Частные случаи:

$$(x + \Delta x)^2 \approx x^2 + 2x\Delta x;$$

$$(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2\Delta x;$$

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x.$$

Относительная погрешность степени равна

$$\varepsilon\,(x^n) = n\,\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Частные случаи:

$$\varepsilon\,(x^2) = 2\frac{\Delta x}{x};$$

$$\varepsilon\,(x^3) = 3\frac{\Delta x}{x}.$$

Формула для вычисления приближенного числового значения корня:

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Частные случаи:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}};$$

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}.$$

Относительная погрешность корня равна

$$\varepsilon\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta x}{x}.$$

Частные случаи:

$$\varepsilon\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta x}{x};$$

$$\varepsilon\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{\Delta x}{x}.$$

Формула для вычисления приближенного числового значения обратной величины:

$$\frac{1}{x+\Delta x} \approx \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{x^2}.$$

Частные случаи:

$$\frac{1}{x-\Delta x} \approx \frac{1}{x} + \frac{\Delta x}{x^2};$$

$$\frac{1}{1+\Delta x} \approx 1 - \Delta x;$$

$$\frac{1}{1-\Delta x} \approx 1 + \Delta x.$$

Глава 22. Интеграл

§ 117. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Отыскание первообразной функции $F(x)$ по заданной ее производной $f(x)$ или по дифференциалу $f(x)\mathrm{d}x$ есть действие, обратное дифференцированию, оно называется ***интегрированием***.

Совокупность первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)\mathrm{d}x$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается символом

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

если

$$\mathrm{d}[F(x) + C] = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)\,\mathrm{d}x$ — подынтегральное выражение, C — произвольная постоянная.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

I. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

II. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x).$$

III. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

IV. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V. Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ — любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (ТАБЛИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ)[1]

$$\int dx = x \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \qquad \int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

Интегрирование методом замены переменной. Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)\,dx$ в интеграл $\int F(u)\,du$.

♦ ПРИМЕР. Вычислить $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$.

РЕШЕНИЕ. Положим $x^2 + 1 = u$, имеем $2x\,dx = du$, $x\,dx = (1/2)du$. Тогда

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} = \int (x^2+1)^{-3}x\,dx = \frac{1}{2}\int u^{-3}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C.$$

[1] Произвольная постоянная везде опущена и подразумевается.

§ 118. Определенный интеграл

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит ***формула Ньютона — Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Например,

$$\int_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3};$$

$$\int_1^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}/2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной. Проиллюстрируем этот способ с помощью примеров.

♦ ПРИМЕР 1. Вычислить

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}.$$

РЕШЕНИЕ. Положим $5x - 1 = u$, тогда $5dx = du$, $dx = (1/5)\,du$. Вычисляем новые пределы интегрирования: $u_н = 5 \cdot 1 - 1 = 4$, $u_в = 5 \cdot 2 - 1 = 9$. Поэтому

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \int_1^2 (5x-1)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{5}\int_4^9 u^{-1/2}\,du =$$

$$= \frac{2}{5}u^{1/2}\Big|_4^9 = \frac{2}{5}(9^{1/2} - 4^{1/2}) = \frac{2}{5}.$$

♦ ПРИМЕР 2. Вычислить

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,dx}{3 - \cos x}.$$

РЕШЕНИЕ. Введем новую переменную подстановкой $3 - \cos x = u$. Продифференцировав, получим $\sin x\,dx = du$. Находим новые пределы интегрирования. Подставив в выражение ($3 - \cos x = u$) значения 0 и $\pi/3$, соответственно получим

$$u_н = 3 - \cos 0 = 3 - 1 = 2, \quad u_в = 3 - \cos \pi/3 = 3 - 1/2 = 5/2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{3 - \cos x} = \int\limits_2^{5/2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln u \,\Big|_2^{5/2} = \ln\frac{5}{2} - \ln 2 = \ln\frac{5}{4} =$$
$$= \ln(1{,}25) \approx 0{,}2231.$$

§ 119. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается в следующем виде:

$F(x, y, y') = 0,$

$F(x, y, y'') = 0,$

....

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$

Дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***. Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением ***с разделяющимися переменными*** называется уравнение вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\,\varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Уравнение вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)y + \varphi(x) = 0,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции от x, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***. В частном случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами. Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = uz$, где u и z — новые функции от x.